BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET

SESSION DE 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Obligatoire

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **6** pages numérotées de 1 à 6

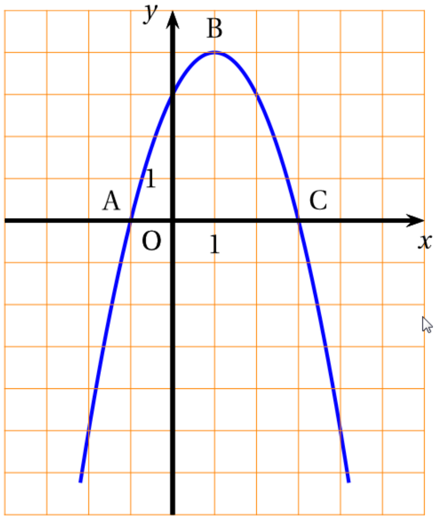
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

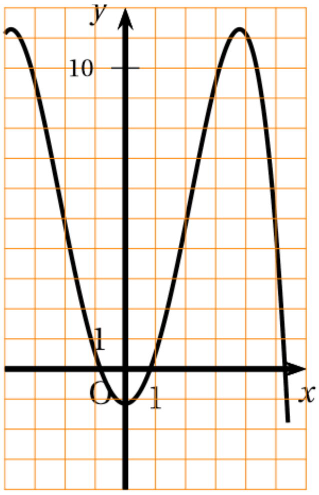
EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des questions suivantes, une ou plusieurs réponses sont exactes. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la ou les réponses choisies.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question , il sera attribué 1 point si toutes les bonnes réponses sont citées, une réponse fausse enlève des points, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

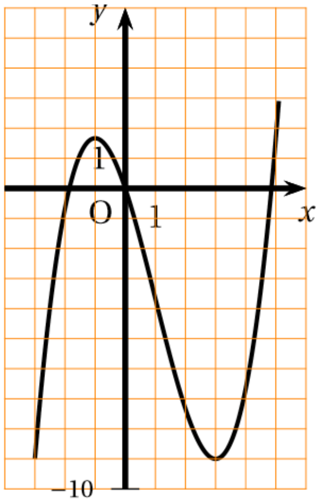
Pour les questions 1,2 et 3. on utilise la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;6]$ dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.
Les points $A(-1;0)$ $B(1;4)$, et $C(3;0)$ appartiennent à la représentation graphique de f. La tangente à la courbe en B est horizontale



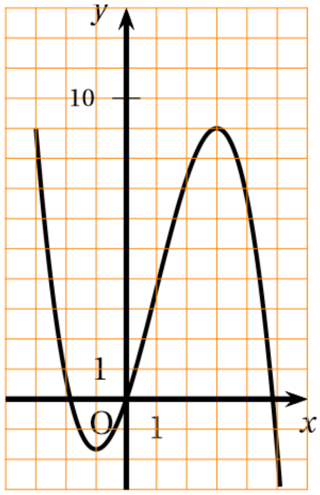
1. **a)** $f'(0)=1$ **b)** $f'(1)=0$
   c) $f'(-1)=0$ **d)** f n'est pas dérivable en 1 **e)** $f(1)=4$
2. Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

3. Soit $I=\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$
   a) $I<0$ **b)** $I>1$ **c)** $I>3$
   d) $1<I<2$ **e)** I ne représente pas une aire
4. Une primitive de la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+2)e^{-x}$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $G(x)=(-x-1)e^{-x}$ **b)** $G(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)e^{-x}$
   c) $G(x)=(-x-3)e^{-x}$ **d)** $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

5. Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $[1;+\infty[$

a) $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ **b)** $H(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2)$ est une primitive de h

c) $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2^2$ **d)** $\varphi(t)=\displaystyle\int_1^t h(x)\,\mathrm{d}x$ est une fonction croissante sur $[1;+\infty[$

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+b\mathrm{i}$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0=1+\mathrm{i}$.

a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$Z_A=1+i$ $z_B=-1+i$ $z_C=-1-i$ $z_D=1-i$ $z_E=-1+\sqrt{3}$

1. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

2. Que peut-on dire du triangle CBE ? Justifier votre réponse.

3. Soit le point F d'affixe $z_F=2e^{-i\frac{\pi}{3}}-1-i$

a) Déterminer la forme algébrique de z_F.

b) Montrer que $\dfrac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ est un nombre réel

c) Que peut-on en déduire pour les points A, E, F ?

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=5\ln(x+3)-x$

1. **a)** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;+\infty[$

b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x)=x\left(5\dfrac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

d) En déduire la limite de f en $+\infty$

e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

2. **a)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$. On notera α cette solution.

b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n+3) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n\neq 0$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=5\ln(x+3)$

En **annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite D d'équation $y=x$ et la courbe C, courbe représentative de la fonction g.

1. **a)** Construire sur l'axe des abscisses de l'**annexe 1** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. **a)** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

e) En déduire que la suite (u_n) converge (on admettra alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$)

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u-14{,}2<0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

a) Justifier que cet algorithme se termine.

b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

EXERCICE 4 (4 points)

Au rayon image et son d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10.}$

On désigne par T l'événement : la personne achète le téléviseur et par L l'événement : la personne achète le lecteur de DVD .
On notera $\overline{T}$ et $\overline{L}$ les événements contraires respectifs de T et de L.

1. **a)** Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Démontrer que la probabilité que la personne n'achète aucun appareil est égal à $\frac{9}{25}$
c) Calculer la probabilité que la personne achète un lecteur DVD
d) On sait que la personne achète le lecteur de DVD. Calculer la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur.

2. 5 clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui n'achète aucun appareil.
a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
b) Quelle est la probabilité pour qu'exactement un client n'ait pas acheté d'appareil ? (Arrondir au centième)

3. Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 € (Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils. On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.
a) Déterminer les valeurs possibles de D
b) Déterminer la loi de probabilité de D.
c) Calculer l'espérance mathématique de D.

NOM : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE 1