BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

EXERCICE 1

1.a) Réponses : **b)** **e)**

2. Réponses : $\mathscr{C}_3$

3. Réponses : **d)**

4. Réponses : **c)** **d)**

5. Réponses : **a)** **d)**

EXERCICE 2

1°- a) Appliquons l'algorithme d'Euclide : $47 = 23\times 2+1 \quad \Leftrightarrow \quad 23\times(-2)+47\times 1=1$

Ce qui prouve que 47 et 23 sont premiers entre eux.

Le couple $(-2;1)$ est une solution particulière de (E) (0,5 pt)

b) (E) : $23x + 47y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 23x+47y=23\times(-2)+47\times 1 \quad \Leftrightarrow \quad 23(x+2)=47(1-y)$

47 divise $23(x+2)$ comme 47 et 23 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 47 divise $x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x+2=47k \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

On remplace dans (E) : $23(x+2)=47(1-y)$ ce qui donne :

$23\times 47k=47(1-y) \quad \Leftrightarrow \quad 23k=1-y$

On a ainsi : $x=-2+47k$ et $y=1-23k$ (1 pt)

<u>Vérification</u> : $23(-2+47k)+47(1-23k)=-46+23\times 47k+47-47\times 23k=1$

$$S=\{(-2+47k;1-23k),k\in\mathbb{Z}\}$$

c) On cherche $x\in[1;46]$ tel que : $23x\equiv 1 \quad [47] \quad \Leftrightarrow \quad 23x=1+47y \quad y\in\mathbb{Z}$

On cherche $x\in[1;46]$ tel que : $23x-47y=1 \quad y\in\mathbb{Z}$

D'après la question précédente x est de la forme : $x=-2+47k$, on veut que $x\in[1;46]$

Déterminons les valeurs possibles de k : $1\le -2+47k\le 46 \quad \Leftrightarrow \quad 3\le 47k\le 48$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{47}\le k\le\dfrac{48}{47}$ comme $k\in\mathbb{Z}$, la seule valeur possible de k est 1.

Il n'y a qu'une seule solution à l'équation $23x\equiv 1 \quad [47]$ dans A : c'est $x=-2+47=45$ (0,75 pt)

2°- a) Si $ab\equiv 0 \quad [47]$ cela signifie que 47 divise $a\times b$, comme 47 est un nombre premier, alors soit 47 divise a , soit 47 divise b, ce qui se traduit par :

alors $a\equiv 0 \quad [47]$ ou $b\equiv 0 \quad [47]$. (0,5 pt)

b) Si $a^2\equiv 1 \quad [47] \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(b-1)\equiv 0 \quad [47]$, on applique la question précédente :

alors $a-1\equiv 0 \quad [47]$ ou $b-1\equiv 0 \quad [47]$. (0,5 pt)

soit $a\equiv 1 \quad [47]$ ou $a\equiv -1 \quad [47]$.

3°- a) Cet algorithme demande un entier $p\in A$ et détermine un entier $q\in A$ tel que $pq-1$ soit un multiple de 47 , ou que $pq\equiv 1 \quad [47]$. (0,5 pt)

b) Tout entier p de A est inférieur à 46 , il ne divise pas 47 puisque 47 est un nombre premier.

<u>Conclusion</u> : Tout entier p de A est premier avec 47 . (0,25 pt)

On suppose que $p\in$ A .

$pq\equiv 1 \quad [47] \quad \Leftrightarrow \quad pq=1+47y \quad y\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad pq-47y=1 \quad y\in\mathbb{Z}$.

p est donc premier avec 47 , d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $p\times u+47\times v=1$, on pose : $q=u$ (0,5 pt)

Il existe un entier relatif q tel que $pq\equiv 1 \quad [47]$

c) Il y aura donc toujours une valeur en sortie dans l'algorithme précédent. (0,25 pt)

4°- Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté inv(p), appartenant à A tel que $p\times \mathrm{inv}(p)\equiv 1 \quad [47]$.

Par exemple : inv(1)= 1 car $1\times 1\equiv 1 \quad [47]$, inv(2)= 24 car $2\times 24\equiv 1 \quad [47]$, inv(3)= 16 car $3\times 16\equiv 1 \quad [47]$.

a) L'algorithme précédent affiche $q = 24$ si on entre $p = 2$ car inv(2)= 24. (0,25 pt)

b) On cherche les entiers p de A qui vérifient p =inv(p) , soit : $p \times p \equiv 1 \quad [47] \quad \Leftrightarrow \quad p^2 \equiv 1 \quad [47]$

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=5\ln(x+3)-x.$$

1.a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;+\infty[$.

f est une somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x)=5\times\frac{1}{x+3}-1=\frac{5-x-3}{x+3}=\frac{2-x}{x+3}.$$

Or $x\geqslant 0\Rightarrow x+3\geqslant 3>0$. Ainsi f' est du signe de $2-x$:

- $2-x>0\Leftrightarrow x<2.$
- $2-x<0\Leftrightarrow x>2.$
- $2-x=0\Leftrightarrow x=2.$

b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Avec ce qui précède :
- La fonction f est croissante sur [0 ; 2[.
- La fonction f est décroissante sur $]2;+\infty[$.
- $f(2)=5\ln(5)-2\approx 4{,}047$ est le maximum de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
signe de f'		$+$		$-$	
			$5\ln(5)-2$		
f		↗		↘	
	$5\ln(3)$				$-\infty$

c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

Comme $x>0$, on peut factoriser :

$$f(x)=5\ln x\left(1+\frac{3}{x}\right)-x=5\ln x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-x=5\ln x-x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

d) En déduire la limite de f en $+\infty$:

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\ln 1=0$, donc finalement :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}5\times(-x)=-\infty.$

e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

D'autre part $f(0)=5\ln 3$. Voir le tableau plus haut.

2.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, f est continue, strictement décroissante de $f(2)>0$ à $-\infty$. Il existe donc un réel unique $\alpha>2$, tel que $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)-\alpha=0$. *(théorème de la bijection)*

b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$f(14)=5\ln 17-14\approx 0{,}17>0$ et $f(15)=5\ln 18-15\approx -0{,}55<0$, donc $14<\alpha<15$.
La calculatrice livre : $f(14{,}2)=5\ln(17{,}2)-14{,}2\approx 0{,}02>0$ et $f(14{,}3)=5\ln(17{,}3)-14{,}3\approx -0{,}05<0$, donc $14{,}2<\alpha<14{,}3$.

c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Le tableau de variations montre donc que :
- $f(x)>0$ sur $[0;\alpha[$; - $f(x)<0$ sur $[\alpha;+\infty[$; - $f(\alpha)=0$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n+3) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n\neq 0$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=5\ln(x+3)$

1.a) Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

En **annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite D d'équation $y=x$ et la courbe C, courbe représentative de la fonction g.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

La suite semble être croissante.

2.a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

La fonction g a même sens de variation que la fonction ln, soit croissante ; on peut également calculer $g'(x)=\dfrac{5}{x+3}>0$ comme quotient de deux nombres supérieurs à zéro.

b) Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

On a vu dans la partie que $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)-\alpha=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)=\alpha \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

Initialisation *:* On a $0\leqslant 4\leqslant\alpha$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité *:* Supposons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant u_p\leqslant\alpha$
Comme la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$ donc en particulier sur $[0;\alpha]$, on a donc :

$g(0)\leqslant g(u_p)\leqslant g(\alpha)$ c'est-à-dire $5\ln 3\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$ (d'après la question précédente).
On a donc *a fortiori* : $0\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$.
L'encadrement est vrai au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

d) Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b.** de la partie B.

1ère méthode :
On a vu que sur l'intervalle $[0;\alpha[$, $f(x)>0$ sur $[0;\alpha[$, donc pour tout u_n tel que
$0\leqslant u_n\leqslant\alpha$, $\ln(u_n+3)-u_n>0 \Leftrightarrow \ln(u_n+3)>u_n \Leftrightarrow g(u_n)>u_n \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$,
ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

2ème méthode :
On peut faire un raisonnement par récurrence avec :
Initialisation : $u_0<u_1$ (*voir résultats question* ***1a.*** *)*
Hérédité : Supposons que $u_n<u_{n+1}$ pour une certaine valeur de $n\in\mathbb{N}$.
Avec g qui est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ (*voir question* ***2.a***) , il vient :
$g(u_n)<g(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1}<u_{n+2}$: C.Q.F.D.

e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que (u_n) converge .

(*on admettra* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$)

Cette suite est croissante et majorée par α : elle converge donc vers une limite l telle que $l\leqslant\alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a) Justifier que cet algorithme se termine.

Cet algorithme calcule successivement $u_1, u_2, \ldots$. On a vu que cette suite est croissante et converge vers le nombre α supérieur à 14,2 . La condition $u-14{,}2\geq 0$ sera donc réalisée au bout d'un certain nombre de répétitions de la boucle *"Tant que"* ; ainsi la lecture de l'algorithme se poursuivra après la Fin du *"Tant que"* et l'algorithme affichera alors la première valeur de la suite supérieure à $14{,}2$.

b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

On obtient $u_6\approx 14{,}22315>14{,}2$.

EXERCICE 3 (??? points)

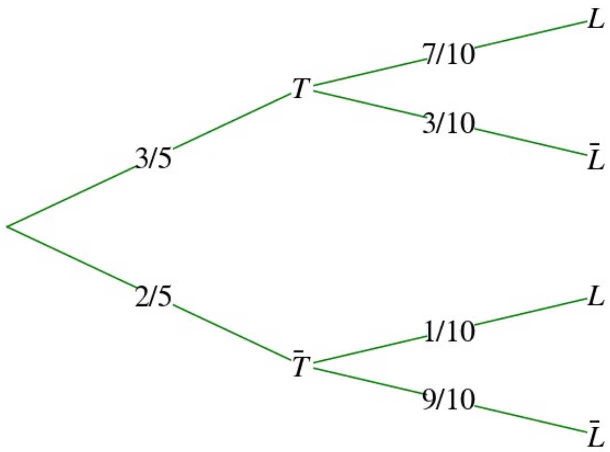
Au rayon image et son d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T l'événement : la personne achète le téléviseur et par L l'événement : la personne achète le lecteur de DVD .

On notera $\bar{T}$ et $\bar{L}$ les événements contraires respectifs de T et de L.

1. **a)** Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



b) Démontrer que la probabilité que la personne n'achète aucun appareil est égal à $\frac{9}{25}$

$$P(\bar{T}\cap\bar{L})=P(\bar{T})\times P_{\bar{T}}(\bar{L})=\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{25}$$

c) Calculer la probabilité que la personne achète un lecteur DVD

$$P(L)=P(T\cap L)+P(\bar{T}\cap L)=\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{23}{50}$$

d) On sait que la personne achète le lecteur de DVD. Calculer la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur.

$$P_L(T)=\frac{P(L\cap T)}{P(L)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}}{\frac{23}{50}}=\frac{21}{23}$$

2. 5 clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui n'achète aucun appareil.

   a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

On répète 5 fois une expérience aléatoire identique qui ne comporte que deux issues. Le succès étant que la personne n'achète aucun appareil est sa probabilité est de $\frac{9}{25}$. Les résultats des expériences sont supposées indépendantes. X Suit donc un loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{9}{25}$

   b) Quelle est la probabilité pour qu'exactement un client n'ait pas acheté d'appareil ? (Arrondir au centième)

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{9}{25}\right)^1\times\left(\frac{16}{25}\right)^4\approx 0{,}3$$

3. Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 € (Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils. On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.

   a) Déterminer les valeurs possibles de D

Si la personne achète deux appareils : $D=0{,}75\times 700=525$
Si la personne achète le téléviseur uniquement : $D=0{,}85\times 500=425$
Si la personne achète le lecteur DVD uniquement : $D=0{,}85\times 200=170$
Si la personne n'achète rien : $D=0$

   b) Déterminer la loi de probabilité de D.

d_i	0	170	425	525
$P(D=d_i)$	$\frac{18}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{21}{50}$

   c) Calculer l'espérance mathématique de D.

$$E(X)=0\times\frac{18}{50}+170\times\frac{2}{50}+425\times\frac{9}{50}+525\times\frac{21}{50}=244{,}3$$