

CONTROLE N°4
L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE

Exercice n°1 : (1,5 point) 1° Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ :

$$\text{a) } S_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{64}{66}$$

$$\text{b) } S_2 = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + \dots + 101 \times 105.$$

2° Ecrire le produit suivant à l'aide du symbole Π :

$$P = (-1) \times 4 \times (-7) \times 10 \times (-13) \times \dots \times 40.$$

Exercice n°2 : (1,5 point) Compléter à l'aide d'un changement d'indice , en précisant votre changement d'indice:

$$S = \sum_{j=3}^{j=20} (5j+3) = \sum_{k=1} \quad \text{en posant :}$$

$$P = \prod_{k=5}^{k=17} (k+3)^2 = \prod_{j=13}^{j=13} \quad \text{en posant :}$$

Exercice n°3 : (5,5 points) Calculer les sommes suivantes :

(S_2 , S_5 et S_6 seront données en fonction de n)

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=36} (3k+2)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{j=n} (4j^2+5)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{k=27} (2k^2+3k-1)$$

$$S_4 = \sum_{p=0}^{p=10} 5^p$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^{3k+5}}{3^{k-1}}$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{k=n} (4k^3+9).$$

Exercice n°4 : (3,5 points) Calculer les produits suivants : (P_3 et P_4 seront données en fonction de n)

$$P_1 = \prod_{k=1}^{k=14} k(k+2)$$

$$P_2 = \prod_{k=3}^{k=24} 4(k-2)$$

$$P_3 = \prod_{k=1}^{k=n} (k+5)$$

$$P_4 = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{2k^2}{3(k+1)}.$$

Exercice n°5 : (2,5 points) Démontrer par récurrence que :

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$$

Exercice n°6 : (2,5 points) Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^i j + 2 \right) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{2} \times \sum_{k=0}^n 3k + 1 \right)$$

Exercice n°7 : (1,5 point) 1° Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 (k+1) = \sum_{j=1}^n j(j-1)^2$, pour tout entier naturel n .

2° Montrer que : $\sum_{k=0}^n k^2 (k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1)$, pour tout entier naturel n .

Exercice n°8 : (1,5 point)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{2x-8} & \text{si } x \neq 4 \\ f(4) = \frac{1}{12} \end{cases}$$
 . Etudier la continuité de f en 4.