**MATHS – SPECIALITE : CONTROLE N°2**
**L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE**

**Exercice n°1 :** ( 1,5 point ) Déterminer le module et l'argument de :

$z_1 = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(e^{i\frac{5\pi}{8}}\right)^2}$ et $z_2 = \sin\theta + i\cos\theta$ , $\theta \in \mathbb{R}$.

**Exercice n°2 :** ( 2 points ) Donner la forme algébrique de : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ .

**Exercice n°3 :** ( 2 points ) Ecrire sous forme trigonométrique : $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^5$.

**Exercice n°4 :** ( 5,5 points ) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les trois équations suivantes :

**a)** $z^2 - 4z + 13 = 0$ ,

**b)** $z^2 + (2i+1)z + i - 3 = 0$ ,

**c)** $z^2 + (-1+i)z + 2 + i = 0$ .

**Exercice n°5 :** ( 2 points ) **1°-** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{1}{3+4i}$ .

**2°-** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ , on a : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$ .

**3°-** Donner une formule similaire pour $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

**Exercice n°6 :** ( 3,5 points ) On considère les nombres complexes : $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = 1 + i$. On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$.

**1°-** Ecrire $Z$ sous forme algébrique.

**2°-** Ecrire $z$ , $z'$ et $Z$ sous forme trigonométrique.

**3°-** En déduire les valeurs de $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

**Exercice n°7 :** ( 4,5 points ) On considère le polynôme $P$ défini par :

$$P(z) = z^3 + (-2-2i)z^2 + (-2-i)z - 1 - 5i .$$

**a)** Démontrer que $P(-i) = 0$.

**b)** Déterminer les réels $a$ , $b$ et $c$ tels que :

$z^3 + (-2-2i)z^2 + (-2-i)z - 1 - 5i = (z+i)\left(az^2 + bz + c\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

**c)** En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$.

**Exercice n°8 :** ( Bonus ) Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $z^2 = 4 + 3i$ .

Indications : $17^2 = 289$ ; $24^2 = 576$ ; $25^2 = 625$