CPES
Nom :

Samedi 10 décembre 2016
2 heures

MATHS – SPECIALITE : CONTROLE N°4
L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE

Exercice n°1 : (1 point) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, calculer A^2, en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°2 : (3 points) .Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3-A^2-8A. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°3 : (1,5 point) Soit $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, où $a,b\in\mathbb{R}$.

Déterminer a et b pour que $A\times B=I_2$. Que représente la matrice B pour la matrice A ?

Exercice n°4 : (2 points) On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, calculer A^2 , A^3 , A^4.

Conjecturer une formule pour A^n , $n\in\mathbb{N}^*$. (on n'attend que la conjecture , pas la démonstration).

Exercice n°5 : (4 points)

On considère les matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, définies par : $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1°- Ecrire A comme une combinaison linéaire de la matrice identité et de la matrice B.
2°- Calculer B^2 , B^3 et en déduire B^n, pour $n\geq 3$.
3°- Calculer A^n , $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice n°6 : (4 points) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de déterminer A^n , $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculer A^2 , A^3 et A^4.
b) Conjecturez l'expression de A^n puis démontrez votre résultat par récurrence.

Exercice n°7 : (5,5 points)

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère : $M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

1°- Calculer $P\times Q$, en déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2°- Soit $D=P^{-1}\times M\times P$. Calculer D, puis exprimer D^n, en fonction de n, pour tout entier naturel n
3°- Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer M^n.