CPES
Nom :

Samedi 11 mars 2017
4 heures

CONTROLE N°6 DE SPECIALITE : CONCOURS BLANC

L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une par importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : (5 points)

1°- Déterminer les racines carrées de $5+12i$.

2°- On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^3+2z^2-3iz-1-3i$.

a) Ce polynôme possède une racine réelle : quelle est-elle ?

b) Factoriser $P(z)$ et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice n°2 : (3,5 points) On considère $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(M-I_3)^2-3M$ et en déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice n°3 : (2,5 points) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice M_m suivante est inversible : $M_m=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & 2-m & 2 \\ 3-m & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice n°4 : (1,5 point) Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant suivant:

$D=\begin{vmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix}$, vous donnerez le résultat sous la forme factorisée en fonction de a, b et c.

Exercice n°5 : (3,5 points) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant : $\begin{cases} 4x-2y-5z=0 \\ x+y-2z=6 \\ 3x-y-2z=-2 \end{cases}$.

Exercice n°6 : (5 points) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$, **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°7 : (6 points) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels? Justifier.

$E_1=\left\{\begin{pmatrix} a-3b & 5b \\ -a+2b & 2a \end{pmatrix}, a, b\in\mathbb{R}\right\}$ $E_2=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-y+3z=0\right\}$

$E_3=\left\{(a;b)\in\mathbb{R}^2 / a\times b=0\right\}$

T-S-V-P

Exercice n°8 : (4 points) **a)** Ecrire sous forme exponentielle, $a = 1 - i\sqrt{3}$, puis a^5 .

b) Ecrire sous forme exponentielle $b = 1 - i$, puis b^3.

c) Pour quelles valeurs de l'entier n , le nombre complexe $\left(\dfrac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}{\left(1 - i\right)^3} \right)^n$ est-il un réel positif?

Exercice n°9 : (9 points)

1°- Puissances successives de T : On note $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer N^k .

b) En vous aidant de la décomposition : $T = \frac{1}{2} I_3 + N$, en déduire que :

$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 2n & -2n(n-2) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

2°- Puissances successives de A. On note $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} & 1 \\ -1 & -5 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} (par la méthode de votre choix).

b) Vérifier que: $P^{-1}AP = T$ .En déduire, en vous aidant de la question précédente, une expression simple de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.