Préparation de la rentrée

Le programme de deuxième année est dans le prolongement du programme de première année : probabilités (finies, discrètes, continues, étude de variables aléatoires, couples), algèbre (espaces vectoriels, étude de matrices et d'applications linéaires), analyse (études de fonctions, suites, séries, intégration, fonction de deux variables), informatique (utilisation de Scilab). A cela s'ajouteront les statistiques.

Pour bien commencer la deuxième année, le cours de première année **doit être su**.

Outre vos condensés de cours, je vous conseille vivement de faire des fiches (ou de les mettre à jour).
Une fiche n'est pas un condensé du cours, mais une présentation synthétique autour d'une question. Un résultat peut apparaître dans plusieurs fiches (par exemple: la factorisation d'un polynôme à l'aide d'une racine est un résultat qui peut être mis dans une **fiche** sur les **polynômes**, mais aussi dans une **fiche** sur les **calculs de limites** comme moyen de lever une indétermination ''0/0'' et aussi dans une **fiche** sur **''comment étudier le signe d'une quantité''**).(cf exemple en fin de poly)

Tout résultat doit être illustré par un exemple pour que vous puissiez vous l'approprier en contexte.

Je vous conseille aussi de faire des fiches lisibles, d'utiliser des couleurs, de laisser de la place pour les compléter.
Apportez systématiquement vos fiches en classe : cela permettra que nous les corrigions ensemble si besoin, et que vous les utilisiez régulièrement, ce qui vous permettra de les apprendre.

Afin de ne pas être mis en difficulté par des considérations techniques, vous devez durant l'été vous entraîner aux calculs en tout genre : calcul de dérivées, de primitives, de sommes, d'intégrales, résolution de systèmes d'équations linéaires, inverse d'une matrice carrée, calculs simples de probabilités, d'espérance, de variance, études de signe, enlever des valeurs absolues, résolution d'inéquation, raisonnement par récurrence,...

Vous aurez besoin l'année prochaine d'avoir installé Scilab sur vos ordinateurs portables (si tout le monde n'en a pas, un pour deux suffira). A ce propos **d'ailleurs pensez à noter dans vos fiches l'utilisation de scilab**. (exemple : pour « voir » si une fonction, une suite, a une limite...)

Je vous rappelle que le premier DS de maths a lieu très tôt après la rentrée, il y aura dans ce devoir, des études de fonctions, de suites, mais aussi des espaces vectoriels, des probabilités...

ENFIN, POUR LA RENTREE , apportez les fiches de révisions que vous aurez rédigées pendant les vacances, on devrait commencer par l'algèbre linéaire.

Quelques points importants (qui doivent apparaitre dans vos fiches, il ne s'agit pas de la liste des fiches à faire)

1 Fonctions

1. Comment montrer qu'une fonction est continue en un point ? sur un intervalle ?
2. Comment montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point ?
3. Comment montrer qu'une fonction est dérivable en un point ?
4. Comment montrer qu'une fonction est bijective sur un intervalle ?
5. Qu'est ce qu'une fonction de classe C^1 ? C^2 ? (sur un intervalle)
6. Que savez-vous sur les fonctions bijectives ? injectives ?
7. Comment montrer qu'une fonction dérivable est convexe ? Comment montrer qu'une fonction de classe C^2 est convexe ?
8. Que pouvez-vous dire sur la courbe représentative d'une fonction convexe ?
9. Comment dessiner une courbe avec Scilab ?

2 Suites

1. Donner quatre méthodes pour montrer qu'une suite converge...n'oubliez pas les suites adjacentes !
2. Comment calculer la limite d'une suite ? (on donnera en particulier les méthodes pour les suites récurrentes (type : $u_{n+l} = f(u_n)$,
3. Comment montrer qu'une suite récurrente est bornée ?
4. Comment étudier la monotonie d'une suite?
5. *Quel est l'outil essentiel pour les suites définies implicitement ? (type : $f_n(u_n) = 0$).(sera repris)
6. Définition des suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, récurrentes linéaires d'ordre 2), et des suites adjacentes.
7. Utilisation de l'IAF ?
8. A quoi peut servir Scilab ? Donner des exemples de script : pour le calcul de u(n)...

3 Sommes et séries

1. Rappeler les formules pour les sommes usuelles.
2. Rappeler les formules et les conditions de convergence pour les séries usuelles.
3. Comment montrer qu'une série converge?
4. Comment montrer qu'une série converge absolument ?
5. Comment utiliser Scilab...

4 Intégration

1. Comment prouver l'existence d'une intégrale ? (2 types d'intégrales...)
2. Comment obtenir une relation de récurrence sur des intégrales?
3. Citer trois manières d'agir sur les bornes d'une intégrale.

4. Comment obtenir des inégalités sur $\int_a^b f(t)dt$? sur $\left|\int_a^b f(t)dt\right|$?

5. Que peut-on dire de $\int_a^x f(t)dt$? de $\int_a^{g(x)} f(t)dt$?

5 Matrices

1. Comment montrer qu'une matrice est inversible? (2 méthodes + critères particuliers)
2. Comment calculer l'inverse d'une matrice? (2 méthodes + matrices diagonales)
3. Rappeler trois démarches pour calculer A^n. (+ matrices diagonales)

6 Espaces vectoriels

1. Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, d'un espace vectoriel de référence (3 méthodes) ?
2. Comment montrer qu'un ensemble de vecteurs est une base d'un espace vectoriel ?
3. Comment trouver une base d'un espace vectoriel?
4. Comment trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base ?

7 Probabilités

1. Comment obtenir une relation de récurrence sur des probas?
2. Comment calculer la probabilité d'une réunion ? d'une intersection ? une probabilité

conditionnelle ?

3. Que signifie la question ’’calculer la loi de X”, où X est une variable aléatoire? 2 méthodes.
4. Rappeler TOUTES les lois usuelles et les modèles expérimentaux correspondants (sauf pour la loi de Poisson...!). Comment les simuler avec Scilab ?
5. Comment montrer qu’une variable aléatoire est à densité ?
6. Comment calculer l’espérance (ou la variance) d’une variable aléatoire finie ? infinie ? à densité ?

Fiche : Fonctions - Continuité

I - Montrer qu'une fonction est continue

Méthode 1

- Opérations sur les fonctions continues :
  Sur certains intervalles, on utilise les fonctions de références (ln, exp, x^n,...) et les théorèmes d'opérations (somme, produit, composée,...) sur les fonctions continues pour **démontrer** qu'une fonction est continue.
- Continuité en un point :
  Si f est définie de façon particulière en un point a, on étudie la continuité en a en vérifiant que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{ou } f(a) \text{ est donné dans l'énoncé.}$$

Remarques 1

- Si la fonction f n'est pas définie en x_0 (valeur non donnée par l'énoncé), on regarde si f est prolongeable par continuité en x_0 en montrant que la limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ est finie. On pose alors $f(x_0) = l$.
- Dans l'étude de la continuité en x_0, on pourra utiliser des DL ou des équivalents pour obtenir la limite plus facilement.
- Dans l'étude de la continuité en x_0, il sera parfois nécessaire de calculer les les limites en x_0^+ et x_0^-.

Exemple 1

Étudions la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Rédaction :
La fonction f étant définie par morceau, on distingue l'étude de la continuité sur $]0;+\infty[$, sur $]-\infty;0[$ et en 0.

- Sur $]0;+\infty[$:
  - $\boxed{f \text{ est continue sur }]0;+\infty[}$ comme quotient (x^2+x+1 et x^2) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, composée ($x \to -\dfrac{1}{x}$ et $t \to e^t$) et produit ($\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ et $e^{-\frac{1}{x}}$) de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
- Sur $]-\infty;0[$:
  - f est la fonction nulle qui est une fonction continue. Donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty;0[}$.
- En 0 :
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)$.
  - $\lim_{x\to 0^+} x^2+x+1 = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$ (par C.C) donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
  - Ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ continue en } 0}$.

En conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

II - Théorème de bijection monotone

Méthode 2 : *Théorème de bijection - Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Hypothèses à vérifier :
  - f est continue sur I.
  - f est strictement monotone sur I.
- Conclusion :
  - Alors, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ (à déterminer).
  - Si, de plus, $\alpha \in J$, alors il existe un unique $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \alpha$, c'est à dire que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

Remarque 2

Attention :
Dans la méthode précédente, le membre de droite de l'équation $f(x) = \alpha$ doit absolument être une **constante**. En d'autre termes, le membre de droite de doit pas dépendre de la variable x. Si c'est le cas, on passe cette expression dans le membre de gauche pour faire apparaître une équation du type $g(x) = 0$ (où 0 est bien une constante) et on applique le théorème de la bijection à la fonction g.

Exemple 2

Montrons que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ puis que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Rédaction :
On remarque tout d'abord que $e^x = \dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow e^x - \dfrac{1}{x} = 0$. On pose alors, pour tout $x > 0$, $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.
On a :

- $\boxed{f \text{ est continue sur }]0;+\infty[}$ car f est la somme de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
- $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$ car f est dérivable et : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ (ou plus simplement comme la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0;+\infty[$).

Donc :

- D'après le théorème de bijection monotone, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]0;+\infty[\text{ sur } \mathbb{R}}$ car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- De plus, $0 \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]0;+\infty[}$ (puisque 0 admet un unique antécédent par la fonction f dans $]0;+\infty[$).
- Encadrons α.
  On a :
  $$f(1/2) = e^{1/2} - 2 < 0 = f(\alpha) \quad \text{et} \quad f(1) = e - 1 > 0 = f(\alpha).$$
  On a donc :
  $$f(1/2) < f(\alpha) < f(1)$$
  et comme f est strictement croissante (car f l'est), on a donc :
  $$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$