BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Obligatoire

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **6** pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 1 (5 points)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$

On donne un tableau de valeurs de certains termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1		$\frac{-1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{39}{16}$	$\frac{135}{32}$	$\frac{391}{64}$

1. **a.** Calculer u_1

   b. Démontrer, par récurrence que pour tout $n\geqslant 3$, $u_n\geqslant 0$

   c. En déduire que pour tout $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant n-2$.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n)

2. On a conçu l'algorithme suivant :

```
VARIABLES:
    n est un entier
    u et M, deux nombres réels

ENTRÉE:
    SAISIR M

TRAITEMENT:
    AFFECTER À n LA VALEUR 0
    AFFECTER À u LA VALEUR 1
    TANT QUE u < M
    |   AFFECTER À u LA VALEUR (1/2)u + n − 1
    |   AFFECTER À n LA VALEUR n + 1
    FIN TANT QUE

SORTIE: AFFICHER n
```

   a) Quelle valeur affiche cet algorithme pour $M=5$; $M=10$?

   b) Expliquer pourquoi on peut affirmer que cet algorithme s'arrêtera quelle que soit la valeur de M entrée.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n=4u_n-8n+24$ pour tout entier naturel n

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

   b. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{7}{2^n}+2n-6$.

   c. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=x_n+y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

   d. En déduire l'expression de $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0+u_1+...+u_n$

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}}=-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_{\mathrm{B}}=\overline{z_{\mathrm{A}}}$ et $z_{\mathrm{C}}=-3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
2. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$z'=\frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.

On note O', A', B', C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

   a) Démontrer que $\mathrm{M}(z)$ est un point invariant si et seulement si $z^2+3\mathrm{i}z=0$

   b) En déduire qu'il existe deux points invariants dont on donnera les affixes.

2. **a)** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'

   b) Démontrer l'alignement des points O, B, A'.

3. Montrer que si le triangle OMM' est rectangle en O alors le point M est sur une droite que l'on précisera.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

- M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. Les événements M et T sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

5. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

6. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   On note C la variable aléatoire égale au coût à engager par animal subissant le test.

   a. Recopier et compléter la loi de probabilité de C :

Coût	0	100	1000
Probabilité			

   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire C.

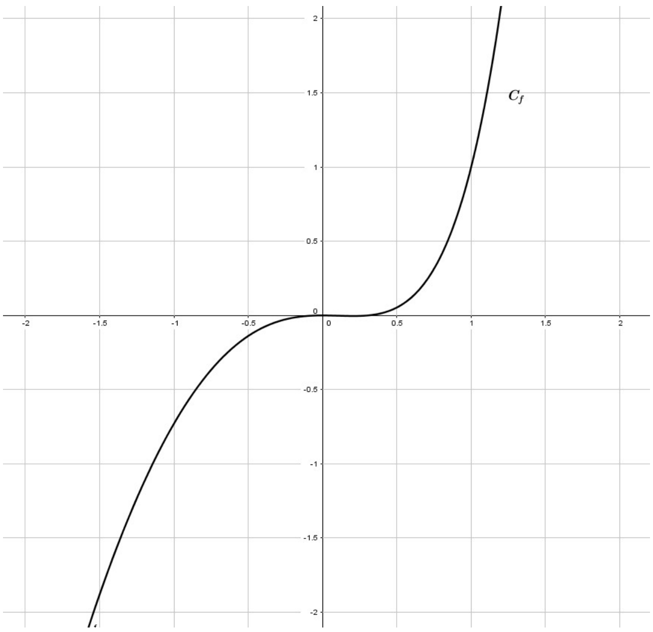
   c. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2\mathrm{e}^{x-1}-x^2$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C_f de la fonction f.



Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

1. Le sens de variation de f sur $[-3;2]$?
2. La position de la courbe C_f par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A- Contrôle de la première conjecture.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et montrer que f' est du même signe que $x\,g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$

2. **Étude du signe de $g(x)$ pour x réel**

   a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

   b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

   c) En déduire les variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.

   d) Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

   On note α cette solution. Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

   e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. **Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.**

   a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f (on ne cherchera pas les limites)

   c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B- Contrôle de la deuxième conjecture

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe $(x'x)$.
2. Préciser alors la position de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses.
3. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?