Correction du devoir commun de Seconde : Mathématiques

Exercice 1 **5 points**

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points suivants :

$A(-8;-3)$ $B(-4;5)$ $C(4;1)$ $J(-8;7)$

Enfin, I est le milieu du segment $[AB]$

1) Faire une figure soignée que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

2)

a) Quelle conjecture peut-on faire concernant le triangle ABC ?

b) Calculer la longueur BC.

Pour la suite de l'exercice, on admettra que : $AC = 4\sqrt{10}$ *et* $AB = 4\sqrt{5}$

c) Prouver votre conjecture concernant le triangle ABC.

3) Calculer les coordonnées du point I

4) Montrer que les points B, C et J sont alignés.

5)

a) Calculer l'équation de la droite (AC)

b) Vérifier que la droite (IJ) a pour équation $y = -3x - 17$

c) En déduire le calcul des coordonnées du point K intersection des droites (AC) et (IJ)

d) Vérifier graphiquement votre réponse

Exercice 2 **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$

1)

a) Comment s'appelle la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ?

b) Montrer que $f(x) = 2(x-5)^2 + 50$

2) Sans justifier donner :

a) Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b) L'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$

3)

a) Compléter directement à l'aide de votre calculatrice et sans justifier le tableau de valeur de la fonction f donné en annexe.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère donné en annexe.

4) On considère l'inéquation $f(x) > 68$

On propose l'algorithme suivant :

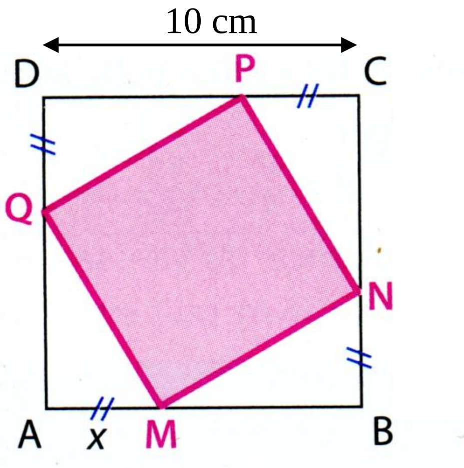
Variable : A est un nombre réel.
Entrée : Demander la valeur A
Traitement : Si $2A^2 - 20A + 100 > 68$
Alors afficher « Cette valeur est solution »
Sinon afficher « Cette valeur n'est pas solution »
Fin du si

a) Que va faire cet algorithme si on entre la valeur $A = -5$? Justifier votre réponse par le calcul.

b) Même question pour $A = 4$

c) Même question pour $A = 8$

5) Résoudre graphiquement, avec toute la précision possible, l'inéquation $f(x) > 68$ sur $\mathbb{R}$
On laissera une trace de la lecture sur le graphique



Partie B

Dans un carré ABCD de 10 cm de côté, on inscrit un carré MNPQ suivant le schéma ci-contre. On pose :

$$AM = BN = CP = DQ = x$$

Où x est une exprimée en centimètres.

1) Montrer que l'aire du carré MNPQ est donné en fonction de x par $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la **Partie A**.

2) Dans ce contexte géométrique, sur quel intervalle I peut varier x ?

3) En utilisant la Partie A, déterminer pour quelle position du point M sur le segment $[AB]$, l'aire du carré MNPQ est minimale ? Quelle est alors cette aire minimale ?

4)
- **a)** Montrer que $f(x) > 68$ équivaut à $(x-2)(2x-16) > 0$
- **b)** A l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de $(x-2)(2x-16)$
- **c)** En déduire pour quelles valeurs de x l'aire du carré MNPQ est strictement supérieure à 68 cm^2 ?

Exercice 3 5 points
Dans un station de ski A, on a relevé les hauteurs de neige, exprimée en cm, chaque semaine durant la saison 2008.
On a obtenu les résultats suivants :

Hauteur	50	100	120	130	140	160	180	200	240	260
Nombre de semaines	1	2	1	1	1	5	2	3	3	3

1) Calculer la hauteur moyenne de neige sur cette période. On donnera le résultat à 1 mm près.

2) Calculer la hauteur médiane de neige sur cette période. Justifier votre réponse

3) Donner le premier et le troisième quartile de cette série statistique. Aucune justification n'est demandée.

4) Pour skier dans les meilleures conditions, la hauteur de neige doit être d'au moins 150 cm.
Peut on considérer que l'on a pu skier dans les meilleures conditions au moins la moitié de la saison dans cette station ? Justifier.

5) On dit que l'enneigement est exceptionnel, lorsque la hauteur de neige est de plus de 2 m.
Est-il exact que durant le quart de la saison, l'enneigement a été exceptionnel dans cette station ? Justifier.

6) Pour, deux autres stations de ski B et C concurrentes on a les résultats suivants concernant la hauteur de neige exprimée en cm :

	Moyenne	Médiane	Premier quartile	Troisième quartile
Station B	173	168	140	200
Station C	176	170	160	200

Sur un dépliant publicitaire créé par le service commercial de la station de ski B, on peut lire :

> Certes notre enneigement moyen est inférieur d'environ 2 % par rapport à celui de la station C, mais nos conditions d'enneigement sont bien plus régulières que celle de la station C.

Ces deux affirmations sont elles vraies ? Justifier vos réponses.

Nom : **Prénom :** **Classe :**

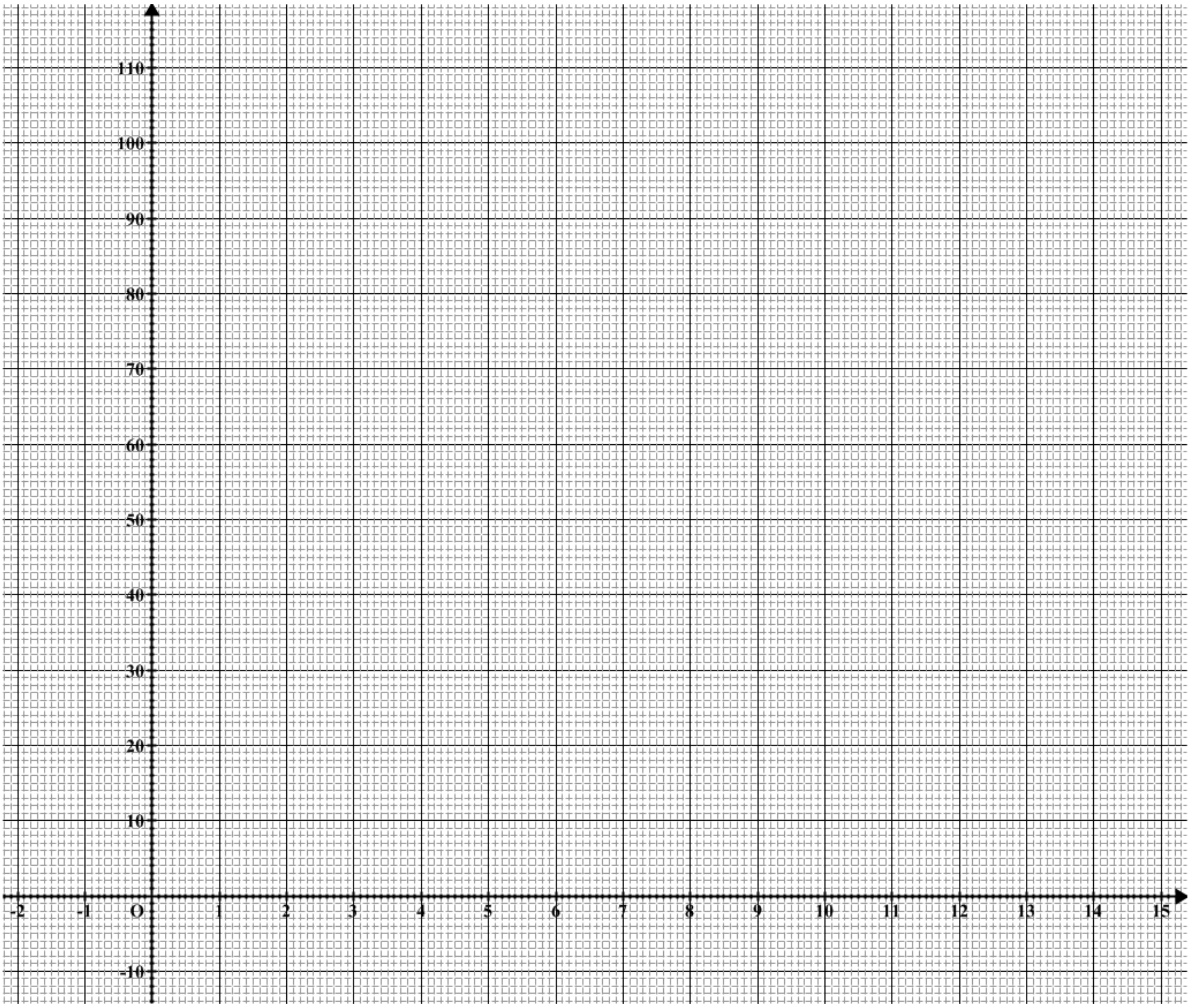
Annexe

Cette annexe est à rendre avec votre copie

Tableau de valeurs

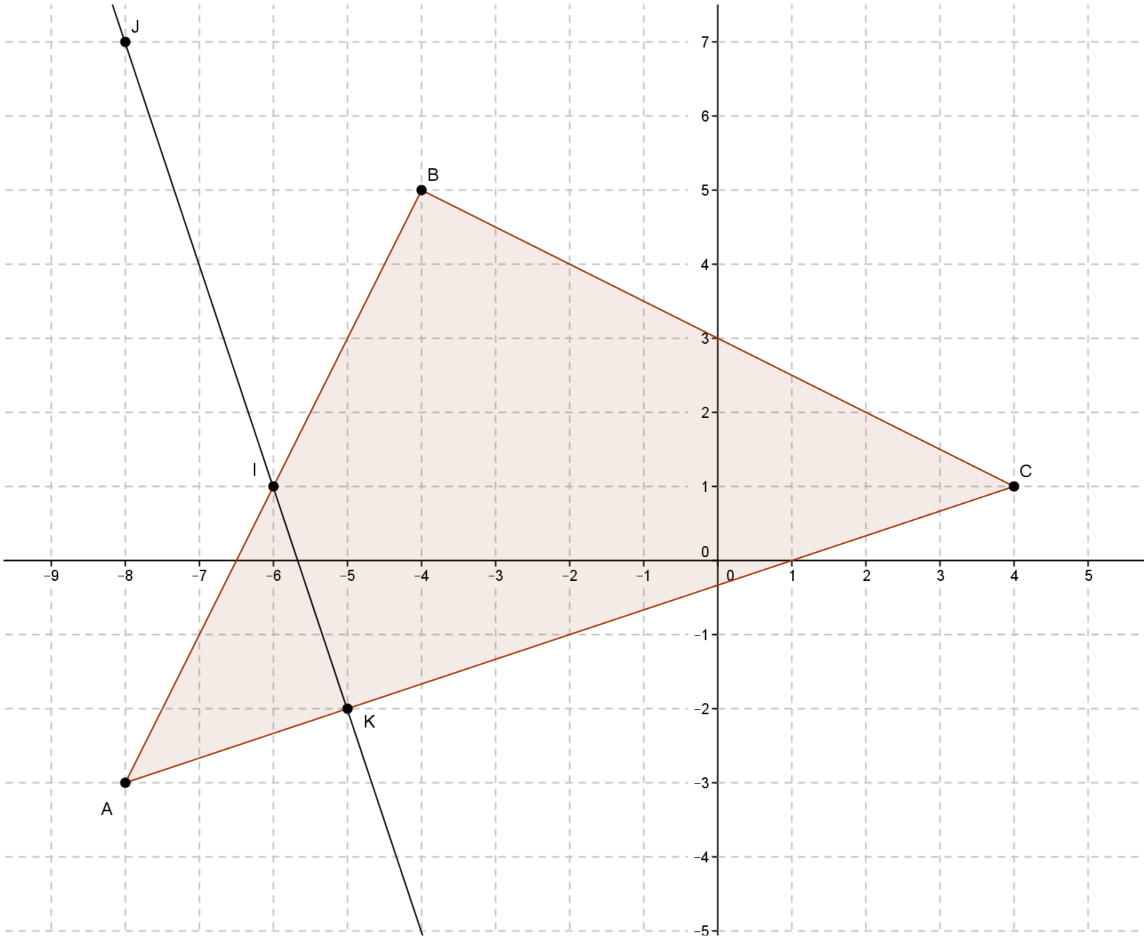
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	100	82	68						68	82	100

Repère



Exercice 4 **5 points**

1)



2)

a)

On peut conjecturer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

b) En repère orthonormé :

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{\left(4-(-4)\right)^2+(1-5)^2}=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=\boxed{4\sqrt{5}}$$

c) On a, d'une part, $AB=BC=4\sqrt{5}$, donc le triangle ABC est isocèle en B

On a d'autre part :

$$AC^2-AB^2-BC^2=\left(4\sqrt{10}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2=16\times 10-16\times 5-16\times 5=160-80-80=0$$

Ainsi on a $AC^2-AB^2-BC^2=0$

Donc $AC^2=AB^2+BC^2$

D'après la réciproque du Théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B

Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en B

3) I est le milieu du segment $[AB]$, donc :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{-8+(-4)}{2};\frac{-3+5}{2}\right) \qquad I\left(\frac{-12}{2};\frac{2}{2}\right) \qquad \boxed{I(-6;1)}$$

4) Les points B, C et J sont alignés ⇔ Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4-(-4) \\ 1-5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} x_J - x_B \\ y_J - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -8-(-4) \\ 7-5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Or $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BJ}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Donc les points B, C et J sont alignés

5)

a) La droite (AC) est sécante à l'axe des ordonnées car $x_A \neq x_C$

Donc l'équation réduite de la droite (AC) est du type $y = ax + b$

Calcul du coefficient directeur a :

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-(-3)}{4-(-8)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Donc l'équation réduite de la droite (AC) est du type $y = \frac{1}{3}x + b$

Calcul de l'ordonnée à l'origine b :

$$A \in (AC) \Leftrightarrow y_A = \frac{1}{3}x_A + b \Leftrightarrow -3 = \frac{1}{3} \times (-8) + b \Leftrightarrow -3 = -\frac{8}{3} + b \Leftrightarrow b = -3 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$$

Donc l'équation réduite de la droite (AC) est $\boxed{y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$

b)

La droite (IJ) a pour équation $y = -3x - 17$ si, et seulement si, les coordonnées de I et J vérifient cette équation.

Pour le point I :

$$-3x_I - 17 = -3 \times (-6) - 17 = 18 - 17 = 1 = y_I$$

Pour le point J :

$$-3x_J - 17 = -3 \times (-8) - 17 = 24 - 17 = 7 = y_J$$

Donc la droite (IJ) a pour équation $\boxed{y = -3x - 17}$

c)

K $(x; y)$ est le point d'intersection des droites (AC) et (IJ) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ y = -3x - 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 17 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ y = -3x - 17 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 51 = x - 1 \\ y = -3x - 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = -50 \\ y = -3x - 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \times (-5) - 17 = 15 - 17 = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{K(-5; -2)}$$

d)

On observe sur le graphique que les droites (AC) et (IJ) se coupent bien au point K de coordonnées $(-5; -2)$

<u>Exercice 5</u> 10 points

<u>Partie A</u>

1)

a) La fonction f est une fonction trinôme et sa courbe s'appelle $\boxed{\text{une parabole.}}$

b) On va développer et réduire l'expression $2(x-5)^2+50$

$$2(x-5)^2+50 = 2(x^2-2\times x\times 5+5^2)+50 = 2(x^2-10x+25)+50$$

$$= 2x^2-20x+50+50 = 2x^2-20x+100$$

Donc $\boxed{f(x) = 2(x-5)^2+50}$

2)

a)

$\boxed{\text{La fonction trinôme } f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; 5] \text{ puis strictement croissante sur } [5; +\infty[}$

b) La parabole $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $\boxed{x=5}$

3)

a) *Voir annexe*

b) *Voir annexe*

4)

a) On entre $A=-5$

On calcule $2A^2-20A+100 = 2\times(-5)^2-20\times(-5)+100 = 50+100+100 = 250$

On teste $2A^2-20A+100 > 68$: on observe que $250 > 68$ est vrai

$\boxed{\text{L'algorithme affiche : « Cette valeur est solution »}}$

b) On entre $A=4$

On calcule $2A^2-20A+100 = 2\times 4^2-20\times 4+100 = 32-80+100 = 52$

On teste $2A^2-20A+100 > 68$: on observe que $52 > 68$ est faux

$\boxed{\text{L'algorithme affiche : « Cette valeur n'est pas solution »}}$

c) On entre $A=8$

On calcule $2A^2-20A+100 = 2\times 8^2-20\times 8+100 = 128-160+100 = 68$

On teste $2A^2-20A+100 > 68$: on observe que $68 > 68$ est faux

$\boxed{\text{L'algorithme affiche : « Cette valeur n'est pas solution »}}$

5)

$$\boxed{S =]-\infty; 2[\, \cup\,]8; +\infty[}$$

Partie B

1) D'une part, on a $DQ = x$ donc $AQ = 10 - x$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{A}_{MNPQ} = \mathcal{A}_{ABCD} - 4 \times \mathcal{A}_{AMQ} = AB^2 - 4 \times \frac{AM \times AQ}{2}$$

$$= AB^2 - 2AM \times AQ = 10^2 - 2x(10 - x)$$

$$= 100 - 20x + 2x^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

Donc l'aire du carré MNPQ est donné en fonction de x par $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la **Partie A**.

2)

$$\boxed{x \in [0; 10]}$$

3)

D'après le sens de variation de la fonction f, vue à la question **2) a)**, l'aire est minimale pour $x = 5\ cm$, c'est-à-dire lorsque $\boxed{M \text{ est le milieu du segment } [AB]}$

Cette aire minimale est alors $f(5) = \boxed{50\ cm^2}$

4)
a)

$$f(x) > 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 > 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 - 68 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 > 0$$

Or : $(x - 2)(2x - 16) = 2x^2 - 16x - 4x + 32 = 2x^2 - 20x + 32$

On a donc bien prouvé l'équivalence : $\boxed{f(x) > 68 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 16) > 0}$

b)

x	0		2		8		10
Signe de $x - 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $2x - 16$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(x-2)(2x-16)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $f(x) > 68 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 16) > 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [0; 2[\cup]8; 10]}$

<u>Exercice 6</u> 5 points

Hauteur	50	100	120	130	140	160	180	200	240	260
Nombre de semaines	1	2	1	1	1	5	2	3	3	3

1)

$$\overline{x} = \frac{50 + 2 \times 100 + 120 + \cdots + 3 \times 240 + 3 \times 260}{1 + 2 + 1 + \cdots + 3 + 3} = \frac{3900}{22} \approx 177{,}3\ cm \text{ à } 1\ mm \text{ près.}$$

Il a neigé sur cette période une hauteur moyenne d'environ 177 cm 3 mm à 1 mm près.

2)

Hauteur	50	100	120	130	140	160	180	200	240	260
Nombre de semaines	1	2	1	1	1	5	2	3	3	3
Effectifs cumulés croissants	1	3	4	5	6	11	13	16	19	22

L'effectif total est 22, donc la médiane est le milieu entre la 11° valeur et la 12° valeur.

D'après le tableau des effectifs cumulés croissants, la médiane est :

$$Me = \frac{160 + 180}{2} = \frac{340}{2} = 170$$

Il a neigé sur cette période une hauteur médiane de 170 cm.

3)

Le premier quartile est 140 cm et le troisième quartile est 240 cm

4) On va calculer la fréquence f de la hauteur de neige d'au moins 150 cm :

$$f = \frac{5+2+3+3+3}{22} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11} > \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$$

Donc on a pu skier dans les meilleures conditions au moins la moitié de la saison dans cette station .

5) .On va calculer la fréquence f de la hauteur de neige de plus de 2 m :

$$f = \frac{3+3}{22} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11} > \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Il est inexact de dire que durant le quart de la saison, l'enneigement a été exceptionnel dans cette station.

OU (faîtes votre choix)

Il est exact de dire que durant le quart de la saison, l'enneigement a été exceptionnel dans cette station.

6)

1° affirmation :

$$176 - \frac{2}{100} \times 176 = 172{,}48\ cm \approx 173\ cm \text{ à } 1\ cm \text{ près}$$

La première affirmation est vraie.

2° affirmation :

L'écart interquartile pour la station B est $q_B = 200 - 140 \approx 60\ cm$

L'écart interquartile pour la station C est $q_B = 200 - 160 \approx 40\ cm$

On a $q_B > q_C$, donc la hauteur de neige est plus homogène dans la station B

La seconde affirmation est fausse.

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Annexe

Cette annexe est à rendre avec votre copie

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	100	82	68	58	52	50	52	58	68	82	100

Repère