BACCALAURÉAT BLANC n°2

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Obligatoire

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **14** pages numérotées de 1 à 14

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,7

1. Le concurrent tire cinq flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.

Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible. Pour un tir, la probabilité du succès est $p=0{,}7$. On répète 5 fois de façon indépendante le tir, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}7$.

Pour une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, on a: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On cherche ici:

$$P(X\geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{3}\times 0{,}7^3\times 0{,}3^2+\binom{5}{4}\times 0{,}7^4\times 0{,}3^1+\binom{5}{5}\times 0{,}7^5\times 0{,}3^0$$

$$=0{,}3087+0{,}36015+0{,}16807=0{,}83692\approx 0{,}837$$

2. Combien de flèches le concurrent doit-il tirer au minimum pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99 ?

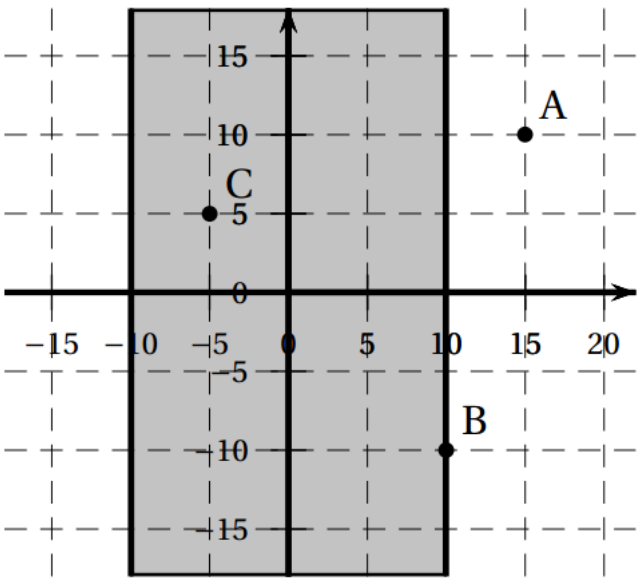
La concurrent tire n flèches de façon indépendante; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}7$. On veut : $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant 1)\geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)\geqslant 0{,}99$

Ainsi le problème revient à déterminer n afin que $0{,}01\geqslant \mathrm{P}(\mathrm{X}=0)\Leftrightarrow 0{,}01\geqslant\binom{n}{0}\times 0{,}7^0\times 0{,}3^n\Leftrightarrow 0{,}01\geqslant 1\times 0{,}3^n$

Cette dernière équation équivaut à $\ln(0{,}3^n)\leqslant\ln(0{,}01)\Leftrightarrow n\ln(0{,}3)\leqslant\ln(0{,}01)\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}3)}\approx 3{,}82$

Il faut donc un nombre de tirs entiers $n\geqslant 4$.

Partie B



Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit un point d'abscisse supérieure ou égale à 10.

Méthode 1 : On veut $P(X \geqslant 10)$, la calculatrice permet pour une loi d'espérance $m=0$ et $\sigma=10$ d'obtenir avec $normalFrep(10,10^{99},0,10) \approx 0,159$ donc $P(X \geqslant 10) \approx 0,159$

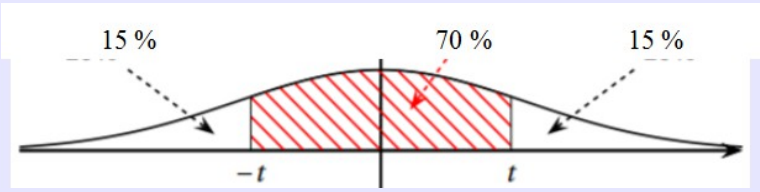
Méthode 2 : En utilisant la symétrie du graphe de la densité d'une loi normale :

On a $P(X \geqslant 10) = P(X \leqslant -10)$; mais comme ici $\sigma=10$, nous pouvons indiquer que :

$P(-10 < X < 10) = P(-\sigma < X < \sigma =) 0{,}683$ ainsi $P(X \geqslant 10) = \frac{1}{2} \times (1 - P(-10 < X < 10)) \approx 0,159$

2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0{,}7$? On arrondira au millimètre,

On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0{,}7$. Cela correspond au schéma suivant, en tenant compte des propriétés de symétrie de la fonction de densité de la loi normale:



$$\begin{aligned} P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0{,}7 &\Leftrightarrow P(X \leqslant t) - P(X \leqslant -t) = 0{,}7 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant t) - P(X \geqslant t) = 0{,}7 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant t) - (1 - P(X \leqslant t)) = 0{,}7 \\ &\Leftrightarrow 2P(X \leqslant t) - 1 = 0{,}7 \\ &\Leftrightarrow 2P(X \leqslant t) = 1{,}7 \\ &\Leftrightarrow P(X \leqslant t) = 0{,}85 \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $t \approx 10{,}36433$.

Les deux droites verticales délimitant la bande grise ont pour équations $x = -10{,}4$ et $x = 10{,}4$; alors la probabilité d'atteindre cette bande grisée est approximativement de 0,7.

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. **a)** Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne moins de 2000 heures ?

D'après le cours, on peut dire que $P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ donc avec $t = 2000$ et $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, il vient : $P(T \leqslant 2000) = 1 - e^{-0,4} \approx 0,330$

b) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne moins de 7000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 5000 heures

On veut $P_{(T\geqslant 5000)}(T\leqslant 7000)=1-P_{(T\geqslant 5000)}(T\geqslant 7000)=1-P(T\geqslant 2000)=P(T\leqslant 2000)\Leftrightarrow 0,330$

On a utilisé la propriété de durée de vie sans vieillissement pour une variable suivant une loi exponentielle .

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t)=\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$. Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$.

Il suffit de dériver *(voir votre cours)*

b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\frac{1}{\lambda}$. Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Pour la *démonstration de cours*, voir *votre cours* également ! L'espérance de durée de vie en heures est ici :

$$E(T)=\frac{1}{2\times 10^{-4}}=5000 \quad \textit{Heures}$$

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\ln(x)+x+1$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction u est la somme des fonctions $x \to \ln(x)$ et $x \to x+1$, toutes deux strictement croissantes sur $]0;+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Remarque : On peut aussi dériver : $u'(x)=\frac{1}{x}+1$ est évidemment strictement positive pour $x>0$ ...

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 0,2 et 0,3.

- D'après la question **1.** , u <u>strictement croissante</u> sur $]0;+\infty[$
- u est <u>continue</u> comme somme de fonctions continues.
- Calculons $u(2)=\ln(2)-1$ or $\ln(2)<\ln(e)=1$ car $e>2$. On prouve ainsi que $u(2)<0$.
  D'autre part, $u(3)=\ln(3)$ or $\ln(3)>\ln(1)=0$ car $3>1$, ce qui montre que $u(3)>0$.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du <u>théorème des valeurs intermédiaires et même de son corollaire</u> *(théorème de la bijection)* . 0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2;3]$. et cet antécédent α est unique sur $]0;+\infty[$.
On a même avec la calculatrice $u(0{,}2)<0$ et $u(0{,}3)>0$ ainsi $0{,}2<\alpha<0{,}3$.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Compte tenu de la stricte croissance de u sur $]0;+\infty[$, avec $u(\alpha)=0$, nous avons donc u strictement négative sur $]0;\alpha[$ et u strictement positive sur $]\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		-	0	+	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)+2]-2$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)+2=-\infty$ donc par limite d'un produit, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

2. **a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$ où u est la fonction définie dans la partie A.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x>0$:

$f'(x)=\frac{1}{x^2}\times[\ln(x)+2]+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}-0=\frac{\ln(x)+2}{x^2}+\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{\ln(x)+2+x-1}{x^2}=\frac{u(x)}{x^2}$

Comme $x^2>0$, le signe de $f'(x)$ est bien celui de $u(x)$!

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

En utilisant le signe de $u(x)$ identique à celui de $f'(x)$ pour $x>0$, nous avons les variations :
f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty]$.

Partie C

Soit C' la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $\ln(x)-f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes C et C' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

En développant : $\ln(x)-f(x)=\ln(x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\times[\ln(x)+2]+2$

$$=\ln(x)-\ln(x)-2+\frac{1}{x}\times\ln(x)+\frac{2}{x}+2$$
$$=\frac{1}{x}\times\ln(x)+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2+\ln(x)}{x}$$

En outre, un point $M(x;y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :
$\begin{cases}y=f(x)\\y=\ln(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\ln(x)\\f(x)=\ln(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\ln(x)\\0=\ln(x)-f(x)\end{cases}$ Pour résoudre ce système, on peut commencer par déterminer si l'équation de la 2ème ligne comporte bien une solution (*au moins une*) :

Or $\ln(x)-f(x)=0$ équivaut d'après ce qui précède à $\frac{2+\ln(x)}{x}=0\Leftrightarrow 2+\ln(x)=0\Leftrightarrow\ln(x)=-2\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-2}$

On obtient donc une unique valeur pour $x=\mathrm{e}^{-2}>0$ qui permet de calculer $y=\ln(\mathrm{e}^{-2})=-2$, ainsi les courbes C et C' ont un seul point commun M dont les coordonnées sont $\mathrm{M}(\mathrm{e}^{-2};-2)$

2. a) Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

Il suffit de dériver à l'aide de la formule $(u^2)'=2\times u'\times u$: $\mathrm{H}'(x)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)=\frac{1}{x}\times\ln(x)=h(x)$ d'où la conclusion : H est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Calculer $I=\int_{e^{-2}}^{2}\frac{2+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Par linéarité de l'intégrale : $\mathrm{I}=\int_{\mathrm{e}^{-2}}^{2}\frac{2+\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2}}^{2}\frac{2}{x}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}^{-2}}^{2}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$

$$=[2\ln(|x|)]_{\mathrm{e}^{-2}}^{2}+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\mathrm{e}^{-2}}^{2}$$
$$=[2\ln(2)-2\ln(\mathrm{e}^{-2})]+\left[\frac{(\ln(2))^2-(\ln(\mathrm{e}^{-2}))^2}{2}\right]$$
$$=2\ln(2)-2\times(-2)+\frac{(\ln(2))^2-(-2)^2}{2}$$
$$=2\ln(2)+4+\frac{1}{2}(\ln(2))^2-2$$

$$= 2+2\ln(2)+\frac{1}{2}(\ln(2))^2$$

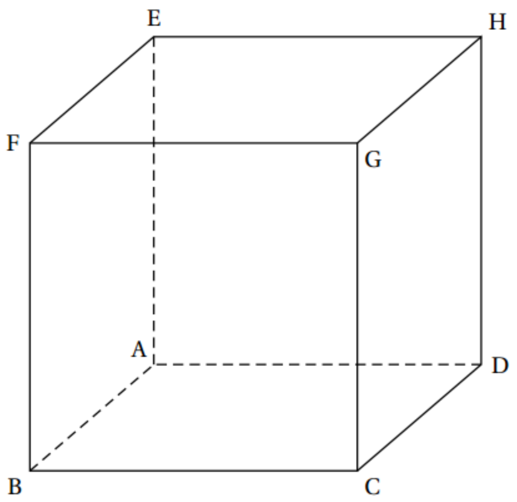
Interprétation graphique :

Pour $e^{-2}\leqslant x\leqslant 2$ on a, par croissance de la fonction $\ln$: $-2\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(2)$ et donc $0\leqslant\frac{2+\ln(x)}{x}\leqslant\frac{2+\ln 2}{x}$ ce qui prouve que pour $e^{-2}\leqslant x\leqslant 2$, C' est au dessus de C .

Donc l'aire délimitée par les courbes C et C' , et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=e^{-2}$ est égale à $I=2+2\ln 2+\frac{1}{2}(\ln(2))^2$

EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $\mathrm{J}\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $\mathrm{K}\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ et $\mathrm{L}(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

La droite (IJ) passe par $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, et elle est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x=1-1\times t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times t, t\in\mathbb{R} \\ z=0+1\times t \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3}, t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$

La droite qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$, passe par le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4};0;1\right)$, c'est-à-dire K ; le vecteur de coordonnées $\left(a-\frac{3}{4};1;-1\right)$ en est un vecteur directeur. Or $\overrightarrow{KL}\left(a-\frac{3}{4};1;-1\right)$.
C'est donc bien une représentation paramétrique de (KL).

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a=\frac{1}{4}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour (t,t').

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=t \\ x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=t \\ 1-t=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{t}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=t \\ 1-(1-t')=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{1-t'}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=t \\ t'=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{1-t'}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases}$$

On obtient finalement $\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z=t \\ \frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ t'=\frac{1}{2} \\ t=1-t' \end{cases}$ qui a une solution si et seulement si $\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

Remarque : Il est alors possible de finir la résolution pour obtenir les coordonnées du point d'intersection des deux droites car si $a=\frac{1}{4}$ alors $t=t'=\frac{1}{2}$ et on reporte pour avoir x,y,z ce qui donne les coordonnées : $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a=\frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

D'après la question précédente, dans ce cas, les diagonales (IJ) et (KL) du quadrilatère $IKJL$ sont sécantes en un point $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Reste à vérifier que Ω est bien le milieu de $[IJ]$ et $[KL]$.

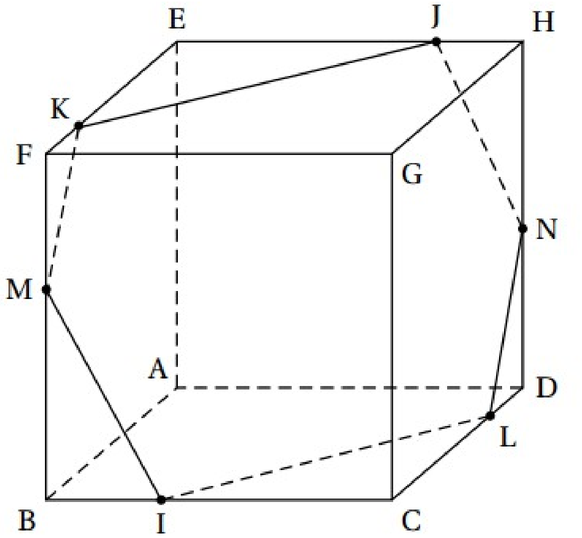
Le milieu de $[IJ]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_I+x_J}{2},\frac{y_I+y_J}{2},\frac{z_I+z_J}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et

celui de $[KL]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_K+x_L}{2},\frac{y_K+y_L}{2},\frac{z_K+z_L}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Les diagonales du quadrilatère $IKJL$ se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Remarque : On pouvait aussi montrer que $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{LJ}$ ont les mêmes coordonnées.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8;9;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs directeurs **non colinéaires** de ce plan. Comme I, J, K définissent ce plan, ils sont non alignés et les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique *(calcul avec les coordonnées)* du produit scalaire. $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$ et donc $\overrightarrow{IJ}.\vec{n}=-1\times8+\frac{1}{3}\times9+1\times5=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{n}$ sont bien orthogonaux.

De même : $\overrightarrow{KL}\left(-\frac{1}{2};1;-1\right)$ et donc $\overrightarrow{KL}.\vec{n}=-\frac{1}{2}\times8+1\times9-1\times5=0$. $\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaire de (IJK), il est bien normal à ce plan.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).

Puisque $\vec{n}$ est normal au plan (IJK), il a donc une équation cartésienne de la forme $8x+9y+5z+d=0$.

Comme le point I appartient à ce plan, ses coordonnées doivent vérifier cette équation :

$8\times1+9\times\frac{1}{3}+5\times0+d=0\Leftrightarrow d=-11$. D'où l'équation cartésienne du plan (IJK) : $8x+9y+5z-11=0$

c) En déduire les coordonnées des points M et N

Une manière de répondre à cette question est de chercher une représentation paramétrique de (BF) qui passe par $B(1;0;0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{BF}(0;0;1)$. M est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF). Ses coordonnées (x,y,z) doivent donc être solutions du système formé par les trois équations issues d'une représentation paramétrique de (BF) et l'équation $8x+9y+5z+d=0$ du plan (IJK) :

$$\begin{cases} x=1+0\times t \\ y=0+0\times t \\ z=0+1\times t \\ 8x+9y+5z-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \\ 8\times1+9\times0+5\times t-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\frac{3}{5} \\ t=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont $\left(1;0;\frac{3}{5}\right)$.

De même, par résolution d'un système similaire, les coordonnées de N sont $\left(0;1;\frac{2}{5}\right)$.

EXERCICE 4 (5 points)

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n \quad : \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n - 0{,}8y_n \\ y_{n+1} = 0{,}8x_n + 0{,}6y_n \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 .

$x_1 = x_{0+1} = 0{,}6x_0 - 0{,}8y_0 = -1{,}8 - 3{,}2 = -5$ $\qquad A_0(-3;4)$

$y_1 = y_{0+1} = 0{,}8x_0 + 0{,}6y_0 = -2{,}4 + 2{,}4 = 0$ $\qquad A_1(-5;0)$

$x_2 = x_{1+1} = 0{,}6x_1 - 0{,}8y_1 = 0{,}6 \times (-5) - 0{,}8 \times 0 = -3$ $\qquad A_2(-3;-4)$

$y_2 = y_{1+1} = 0{,}8x_1 + 0{,}6y_1 = 0{,}8 \times (-5) + 0{,}6 \times 0 = -4$

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

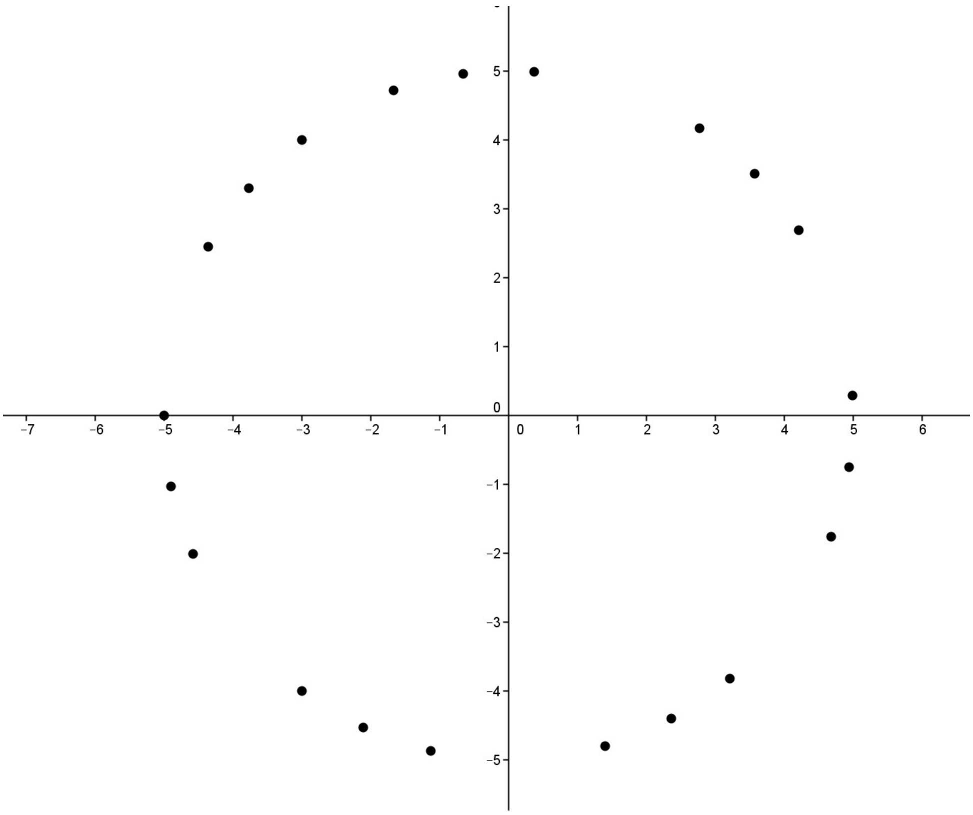
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

x prend la valeur $0{,}6t - 0{,}8y$

y prend la valeur $0{,}8t + 0{,}6y$

c) A l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant:



Identifier les points A_0, A_1 et A_2.. On les nommera sur la figure jointe en annexe (à rendre avec la copie).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

Pour tout n entier naturel , les points A_n semblent appartenir au cercle de centre O de rayon 5

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ l'affixe du point A_n

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

Pour tout n entier naturel , l$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{(0{,}6x_n - 0{,}8y_n)^2 + (0{,}8x_n + 0{,}6y_n)^2}$

$u_{n+1} = \sqrt{0{,}36x_n^2 + 0{,}64y_n^2 - 0{,}96x_n y_n + 0{,}64x_n^2 + 0{,}36y_n^2 - 0{,}96x_n y_n} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| = u_n$

La suite (u_n) est donc constante, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

Pour tout n entier naturel , $u_n = |z_n| = 5 = OA_n$, tous les points A_n sont sur le cercle de centre O de rayon 5 .

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0{,}6$ et $\sin(\theta) = 0{,}8$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

Pour tout n entier naturel ,

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta) \times (x_n + iy_n) = (0{,}6 + 0{,}8i) \times (x_n + iy_n) = (0{,}6x_n - 0{,}8y_n) + i(0{,}8x_n + 0{,}6y_n) = x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1}$

3. **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

Première Méthode : (au programme?)

Pour tout n entier naturel , nous venons de démontrer que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et de premier terme : $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 = -3 + 4i$, par formule : $z_n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \times z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$

Deuxième Méthode : par récurrence

Initialisation : Pour $n=0$, $z_0=(e^{i\theta})^0 z_0=z_0$, l'égalité est vérifiée au rang 0

Hérédité : Si , pour un certain entier naturel n , $z_n=e^{in\theta}z_0$, montrons qu'alors $z_{n+1}=e^{i(n+1)\theta}z_0$

$z_{n+1}=e^{i\theta}z_n=e^{i\theta}e^{in\theta}z_0=e^{i(n+1)\theta}z_0$

L'égalité est héréditaire et initialisée , d'après le principe de récurrence , elle est vérifiée pour tout entier naturel n .

b) Montrer que $\pi-\theta$ est un argument du nombre complexe z_0.

$z_0=x_0+iy_0=-3+4i$ et $|z_0|=u_0=5$

Notons $\theta_0=arg(z_0)\ \ [2\pi]$, $\cos(\theta_0)=\frac{-3}{5}=-0{,}6$ et $\sin(\theta_0)=\frac{4}{5}=0{,}8$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)=-0{,}6$ et $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)=0{,}8$

ainsi $\pi-\theta$ est un argument du nombre complexe z_0.

c) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.

On sait que : pour tout entier naturel n, $z_n=e^{in\theta}z_0$, donc

$arg(z_n)=arg(e^{in\theta}z_0)=arg(e^{in\theta})+arg(z_0)=n\theta+\pi-\theta=(n+1)\pi-\theta\ \ [2\pi]$

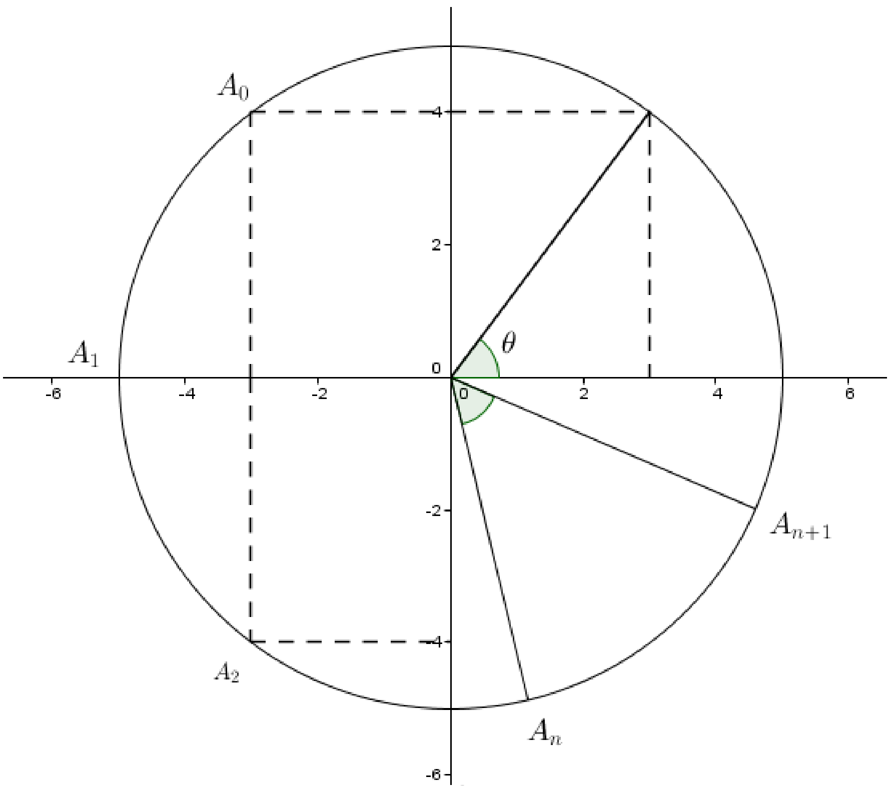
Représenter θ sur la figure jointe en annexe 2, (à rendre avec la copie).

d) Exprimer $\arg(z_{n+1})$ en fonction de $\arg(z_n)$ et en déduire comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

On sait que : pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=e^{i\theta}z_n$, donc

$arg(z_{n+1})=arg(e^{i\theta}z_n)=arg(e^{i\theta})+arg(z_n)=\theta+arg(z_n)\ \ [2\pi]$

On sait que $OA_n=5$ pour tout entier naturel n, donc le point A_{n+1} est sur le cercle de centre O et de rayon 5 , de plus $arg(z_{n+1})=\theta+arg(z_n)$ donc $(\vec{u},\overrightarrow{OA_{n+1}})=\theta+(\vec{u},\overrightarrow{OA_n})$ ce qui nous permet de construire le point A_{n+1} à partir du point A_n



ANNEXE