Devoir commun 2017 – correction sujet B

Exercice 1

Le DAS, « Débit d'Absorption Spécifique », est un indice qui mesure le niveau de radiofréquences émis par un téléphone portable envers l'usager durant son fonctionnement en puissance maximale.

On a étudié le DAS de 2500 téléphones portable sur le marché en France et aux Etats-Unis.

Les résultats sont indiqués dans le tableau donné en **Annexe 1** .

1. **a)** Calculer la fréquence en pourcentage des téléphones portables ayant un DAS dans l'intervalle $[0{,}5\,;0{,}7[$

$\frac{304}{2500}\times 100=12{,}16$ Il y a 12,16 **%** des téléphones portables ayant un DAS dans l'intervalle $[0{,}5\,;0{,}7[$

b) Compléter le tableau donné en Annexe 1 sans justifier.

Intervalle dans lequel se trouve le DAS	Centre de l'intervalle	Effectif	Fréquence en %	Fréquence cumulée croissante en %
$[0{,}1\,;0{,}3[$	**0,2**	128	**5,12**	**5,12**
$[0{,}3\,;0{,}5[$	**0,4**	312	**12,48**	**17,6**
$[0{,}5\,;0{,}7[$	**0,6**	304	**12,16**	**29,76**
$[0{,}7\,;0{,}9[$	**0,8**	376	**15,04**	**44,8**
$[0{,}9\,;1{,}1[$	**1**	740	**29,6**	**74,4**
$[1{,}1\,;1{,}3[$	**1,2**	456	**18,24**	**92,64**
$[1{,}3\,;1{,}5[$	**1,4**	116	**4,64**	**97,28**
$[1{,}5\,;1{,}7]$	**1,6**	68	**2,72**	**100**
	Total	**2500**	**100**	

2. **a)** Déterminer la moyenne à 0,01 près (on prendra le centre de l'intervalle pour les calculs)

$\bar{x}=128\times 0{,}2+312\times 0{,}4+\ldots+68\times 1{,}6\approx 0{,}88$ **La moyenne est d'environ 0,88 à 0,01 près**

b) Déterminer l'étendue de cette série statistique.

$1{,}7-0{,}1=1{,}6$. **L'étendue est de 1,6**

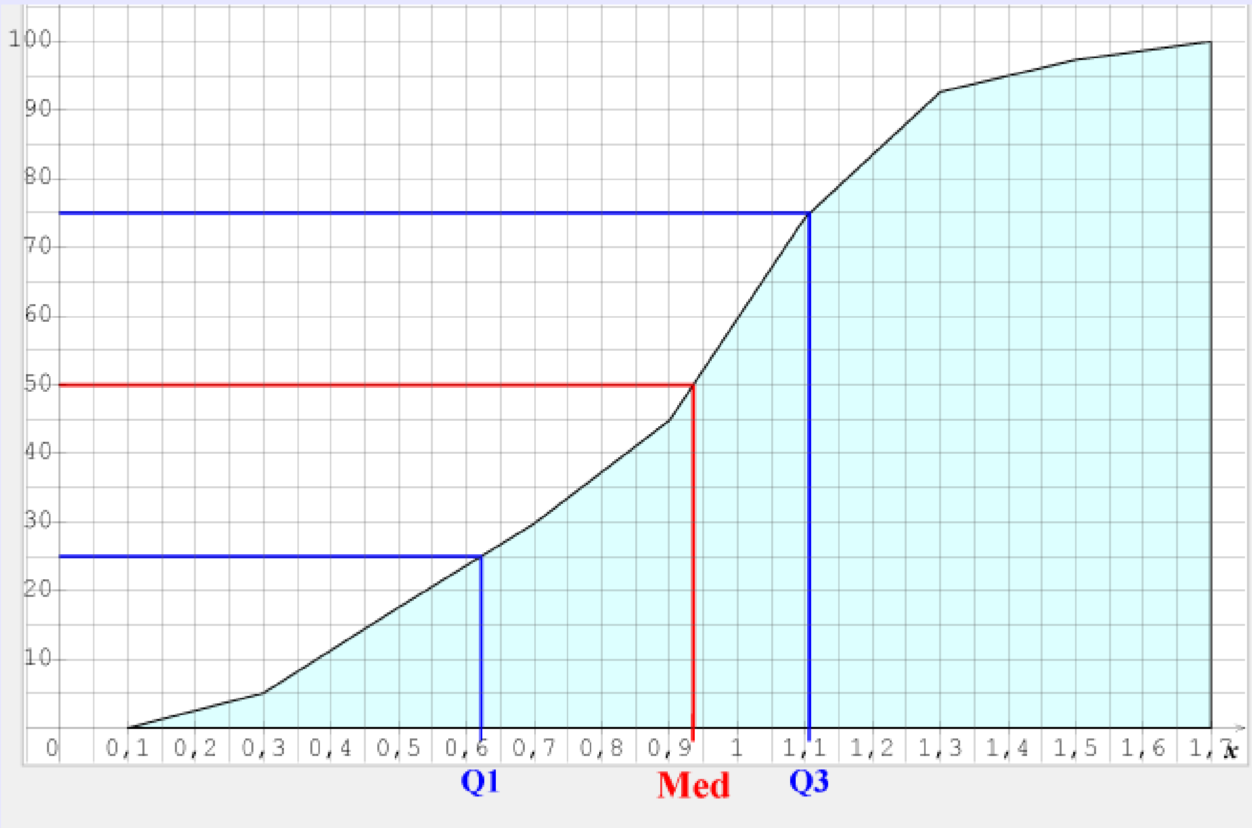
3. Déterminer la classe où se situe la médiane. Justifier votre réponse avec précision.

$\frac{2500}{2}=1250$ La médiane correspond à un DAS compris entre celui du $1250^{ème}$ et du $1251^{ème}$ téléphone qui est **dans la classe $[0{,}9\,;1{,}1[$**

4. On donne en **Annexe 2** le polygone des fréquences cumulées croissantes exprimées en pourcentage. La médiane est l'antécédent de la proportion 50 % par la fonction représentée par ce polygone.

a) Lire graphiquement la médiane avec toute la précision permise par le graphique.

Il semble que la médiane soit de 0,94 environ



b) En vous inspirant de la question précédente, lire graphiquement le premier quartile et le troisième quartile avec toute la précision permise par le graphique.

$\boldsymbol{Q_1 \approx 0{,}62}$ et $\boldsymbol{Q_3 \approx 1{,}11}$

5. Le téléphone portable de Florence Leretour a un DAS de 0,9. Son téléphone fait-il partie de la moitié des portables qui ont le DAS le plus faible ? Justifier.

La médiane étant de 0,94 environ, cela signifie qu'au moins la moitié des téléphones ont un DAS de 0,94 ou moins. Donc s**on téléphone fait partie de la moitié des portables qui ont le DAS le plus faible.**

Exercice 2 Pensez à changer de copies

Une entreprise fabrique un parfum. On note x la quantité produite quotidiennement en hectolitres.

Les capacités de production de l'entreprise imposent que $x \in [0\,;350]$. Le bénéfice quotidien en euro est donné par la fonction B définie sur $[0\,;350]$ par : $B(x) = -3x^2 + 966x - 1920$

Un bénéfice strictement négatif signifie que l'entreprise est déficitaire : C'est-à-dire qu'elle perd de l'argent.

Un bénéfice strictement positif signifie que l'entreprise est bénéficiaire.

On donne en **Annexe 3** la courbe de la fonction B .

On laissera une trace des lectures graphiques demandées dans cet exercice.

1. A l'aide de la courbe donnée en **Annexe 3** et avec toute la précision possible donner :

a) Pour quelles valeurs de x l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

L'entreprise semble bénéficiaire pour $x \in]2\,;320[$

b) Pour quelle valeur de x l'entreprise fait-elle un bénéfice maximal ?

Le bénéfice semble maximal pour $x=160$

2. Montrez que :

a) $B(x)=(x-320)(6-3x)$

$(x-320)(6-3x)=6x-3x^2-1920+960x=-3x^2+966x-1920=f(x)$

b) $B(x)=-3(x-161)^2+75843$

$-3(x-161)^2+75843=-3(x^2-322x+25921)+75843=-3x^2+966x-77763+75843$

Ainsi $-3(x-161)^2+75843=-3x^2+966x-1920=f(x)$

3. **a)** A l'aide d'une forme adaptée, étudiez le signe de $B(x)$.

On utilise la forme factorisée:

$x-320>0 \Leftrightarrow x>320$ et $6-3x>0 \Leftrightarrow -3x>-6 \Leftrightarrow x<2$ Cela nous permet de dresser le tableau de signes

x	0		2		320		450
$x-320$		–		–	0	+	
$6-3x$		+	0	–		–	
$B(x)$		–	0	+	0	–	

b) En déduire pour quelles valeurs de x l'entreprise est bénéficiaire.

L'entreprise est bénéficiaire sur $]2;320[$

4. **a)** A l'aide d'une forme adaptée, dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0;350]$

La forme canonique nous permet de dresser le tableau de variation:

x	0		161		350
$B(x)$		↗	75843	↘	

b) En déduire pour quelle valeur de x l'entreprise fait un bénéfice maximal et préciser ce bénéfice maximal.

Le bénéfice est maximal quand $x=161$. Celui-ci est de 75843 €

5. En 2017, l'état décide de prélever une nouvelle taxe de 100 € par hectolitre produit.

La taxe en euro est donné par la fonction T définie sur $[0;350]$ par $T(x)=100x$

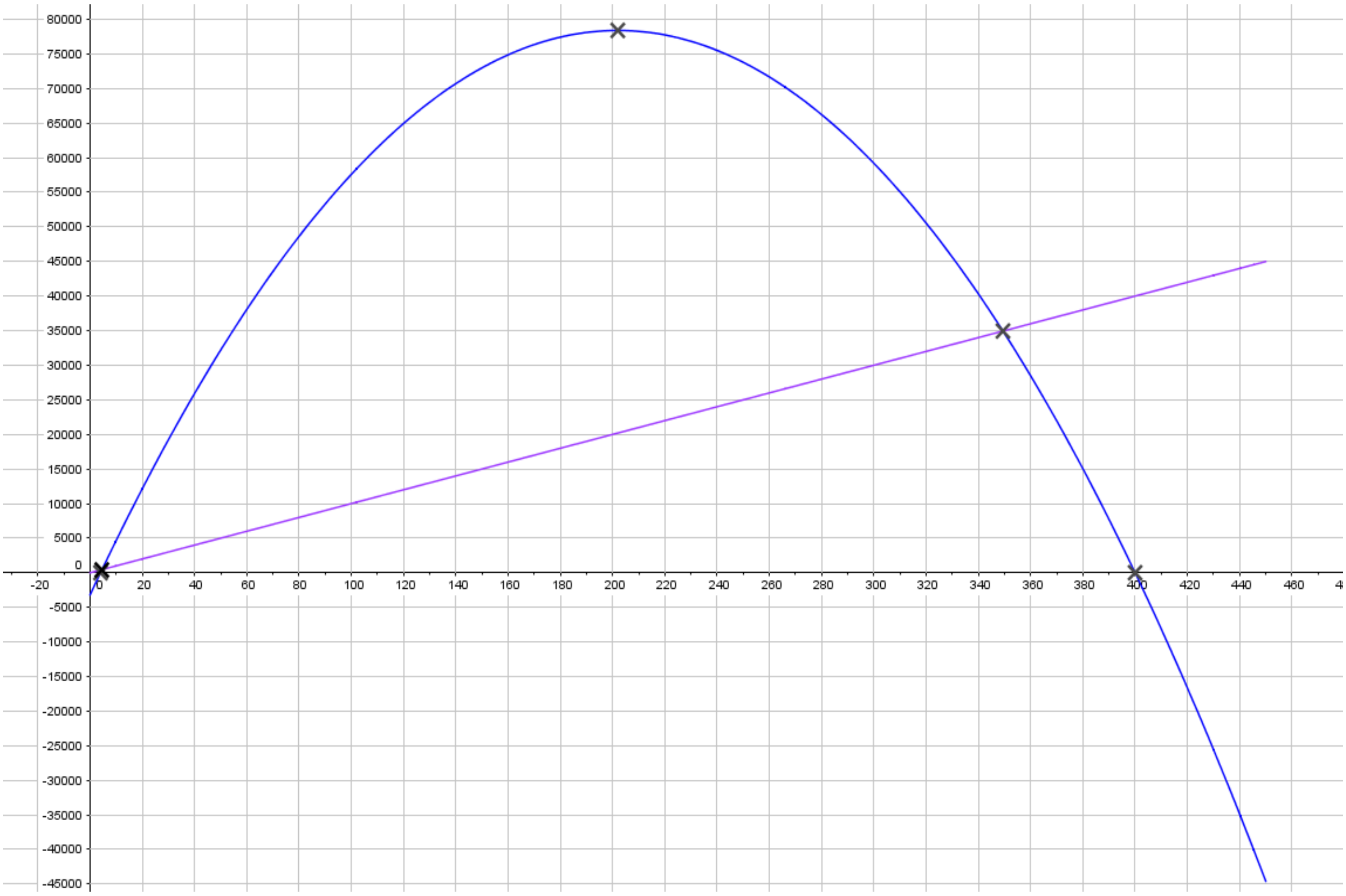
a) Quel est le montant de la taxe si l'entreprise produit 100 hl de parfum ? Quel est alors le bénéfice de l'entreprise taxe déduite ?

$T(100)=100\times100=10000$. Pour 100hl, la taxe est de 10000€

$B(100)=-3\times100^2+966\times100-1920=64680$

$B(100)-T(100)=64680-10000=54680$. Le bénéfice taxe déduite sera de 54680 €

b) Tracer la représentation graphique de la fonction T dans le repère donné en **<u>Annexe 3</u>**



c) En déduire graphiquement pour quelles valeurs de x l'entreprise est bénéficiaire après l'application de cette taxe.

L'entreprise semble bénéficiaire pour $x \in [3 ; 286]$

6. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	A est un nombre dans l'intervalle $[0; 350]$
Entrée :	Lire la valeur A
Traitement :	Si $-3A^2 + 866A - 1920 > 0$
	Alors afficher « L'entreprise est bénéficiaire en 2017 »
	Sinon afficher « L'entreprise n'est pas bénéficiaire en 2017 »
	Fin du Si

a) Qu'affichera l'algorithme si on entre $A = 300$? Justifier.

$-3 \times 300^2 + 866 \times 300 - 1920 = -12120 < 0$

Donc l'algorithme affichera "L'entreprise n'est pas bénéficiaire en 2017"

7. Expliquer pourquoi on teste l'inégalité « $-3A^2+866A-1920>0$ » dans le contexte de la production de cette entreprise ?

L'entreprise est bénéficiaire si $B(x)-T(x)>0$

Or $B(x)-T(x)=-3x^2+966x-1920-100x=-3x^2+866x-1920$

Exercice 3

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on considère les points :

$A(-3\,;2)B(2\,;1)C(-1\,;-6)$

On donne un repère en **Annexe 4** que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Calculer :

a) Les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}$ et $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+1}{2}=1{,}5$

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-2\\-6-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$

c) La longueur AC.

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-6-2)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$

2) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier à l'aide de calculs.

Calculons également avec la même technique les distances $AB=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$ et $BC=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$

Nous avons alors $AC^2=68$ puis $AB^2+BC^2=26+58=84$, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, ainsi par contraposée du théorème de Pythagore , nous pouvons affirmer que le triangle n'est pas rectangle.

3) On considère les points P et R tels que :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AR}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Placer, sans justifier, les points P et R dans le repère donné en **Annexe 4**

Voir la figure à la fin de l'exercice.

On s'appuie sur le quadrillage pour déterminer $-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ou encore $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Par ailleurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est aussi le vecteur $\overrightarrow{AI}$ puisque I est le milieu de $[AB]$ ce qui permet de déduire $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

4) On considère les points M et N tels que :

- ABCM est un parallélogramme.
- N est le symétrique de M par rapport à C.

a) Calculer les coordonnées des points M et N.

Comme ABCM est un parallélogramme, on a l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$ donc leur coordonnées sont égales.

Puisque $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}-1-x_M\\-6-y_M\end{pmatrix}$ il vient : $\begin{cases}5=-1-x_M\\-1=-6-y_M\end{cases}$ d'où $\begin{cases}6=-x_M\\5=-y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-6\\y_M=-5\end{cases}$: $M(-6;-5)$

Comme N est le symétrique de M par rapport à C, C est donc le milieu de $[MN]$, ainsi :

$x_C=\frac{x_M+x_N}{2}$ et $y_C=\frac{y_M+y_N}{2}$ ce qui équivaut à $-1=\frac{-6+x_N}{2}$ et $-6=\frac{-5+y_N}{2}$ donc $-2=-6+x_N$ et $-12=-5+y_n$. Finalement $N(4;-7)$

b) On considère un point $S(0\,;\,y)$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SC}$ soient colinéaires.

Calculer y

$\overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} x_C - x_S \\ y_C - y_S \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} -1 - x_S \\ -6 - y_S \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} -1 \\ -6-y \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, ce qui équivaut à l'égalité des produits : $5\times(-6-y)$ et $-1\times(-1)$, cela nous donne

l'équation : $5(-6-y)=1$ d'où $-30-5y=1 \Leftrightarrow -5y=31 \Leftrightarrow x=\dfrac{31}{-5}=-6{,}2$

c) Les points M, S et N sont ils alignés ? Justifier.

1ère méthode : Ce sera le cas si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MS}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont colinéaires.

Vérifions avec leurs coordonnées :

$\overrightarrow{\mathrm{MS}}\begin{pmatrix} 6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $-1{,}2\times 10$ et -2×6 sont égaux , ce qui est le cas !

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MS}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont colinéaires d'où les points M, S et N sont alignés .

2ème méthode : Grâce à d'autres alignements et des parallélismes déjà connus :

ABCM est un parallélogramme *(voir **4.a.**)* donc $(\mathrm{AB})//(\mathrm{CM})$, par ailleurs, $(\mathrm{AB})//(\mathrm{SC})$ puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$ sont colinéaires *(voir **4.b.**) ;* finalement les droites (CM) et (SC) sont nécessairement parallèles.

Ces dernières ont un point commun C donc elles sont même confondues : les points $\mathrm{M}, \mathrm{S}, \mathrm{C}$ sont sur la même droite (MC).

En outre, N est le symétrique de M par rapport à C *(voir **4.a.**)*, ce qui prouve que $\mathrm{N}\in(\mathrm{MC})$, ainsi :

$\mathrm{S}, \mathrm{N}, \mathrm{M}, \mathrm{C}$ sont sur la même droite (MC) donc tous alignés !