BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **ES**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5.

Avant de démarrer, vérifiez que vous avez bien les cinq pages du sujet.

Les **seules** calculatrices autorisées sont :

Les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique

Les calculatrices programmables avec mémoire alphanumérique et disposant de la fonctionnalité « Mode Examen »

Toute autre calculatrice est formellement interdite

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Toute trace de recherche ou de prise d'initiative, même non aboutie, pourra être prise en compte dans l'évaluation de votre copie

On rappelle aussi que dans un exercice, on peut admettre un résultat et s'en servir par la suite.

EXERCICE 1 (5 points)

Un chalutier se rend chaque jour sur sa zone principale de pêche.

La probabilité qu'un banc de poisson soit sur cette zone un jour donné est de 0,7

Ce chalutier est équipé d'un sonar pour détecter les bancs de poissons qui a les caractéristiques suivantes :

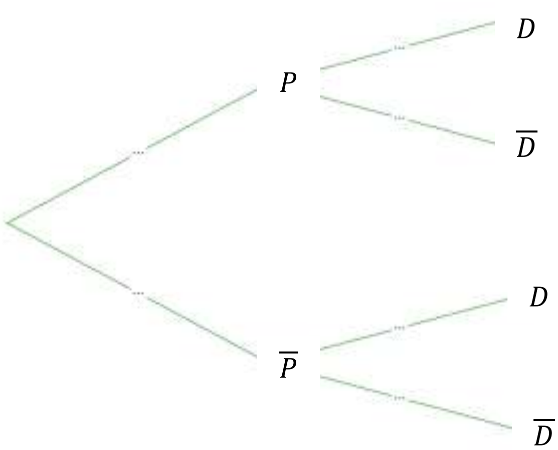
- Si un banc de poisson est présent sur zone, le sonar indique ce banc dans 80 % des cas.
- S'il n'y a de banc de poisson présent sur zone, le sonar indique néanmoins un banc dans 5 % des cas.

On note :

- P l'événement : « Un banc de poisson est présent sur zone »
- D l'événement : « Le sonar indique un banc de poisson »

Sauf mention contraire, on donnera les valeurs exactes des probabilités soit sous forme décimale soit sous forme de fractions irréductibles.

1) Reproduire sur votre copie et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous traduisant cette situation :



2) Calculer la probabilité que le sonar indique un banc de poisson et qu'il n'y en ait pas.

3) Montrer que la probabilité que le sonar indique un banc de poisson est égale à 0,575

4) Ce jour là, le sonar indique un banc de poisson.

Calculer la probabilité qu'il y ait effectivement un banc de poisson.

5) Sur une semaine, c'est-à-dire 7 jours, le chalutier s'est rendu sur sa zone principale de pêche chaque jour.

Le chalutier ne déploie ses filets de pêche que si le sonar indique la présence d'un banc de poisson sinon il part immédiatement sur une autre zone de pêche.

On admettra que la présence d'un banc de poisson et le fonctionnement du sonar sont indépendant d'un jour sur l'autre.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où le chalutier est parti immédiatement sur une autre zone de pêche.

a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b) Calculer la probabilité à 10^{-3} près que le chalutier soit parti immédiatement sur une autre zone de pêche exactement trois jours durant cette semaine.

c) Sur un grand nombre de sorties en mer quel est le nombre moyen de fois par semaine où le bateau reste sur sa zone de pêche principale.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 300 \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On pose $v_n = u_n - 1500$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le terme initial v_0

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 1500 - 500 \times 0{,}8^n$$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Justifier votre réponse.

4) On propose l'algorithme suivant :

$\boldsymbol{U \leftarrow 1000}$

$\boldsymbol{N \leftarrow 0}$

Tant que $\boldsymbol{U} < 1450$

$\boldsymbol{U \leftarrow 0{,}8 \times U + 300}$

$\boldsymbol{N \leftarrow N + 1}$

Fin du Tant que

Quelle valeur contiendra la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Partie B

Une association caritative a étudié l'évolution du montant des dons année après année.

Pour n entier naturel non nul, on note u_n le montant des dons en euros pour l'année $2015 + n$

Cette étude a permis d'établir que $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 300$ et $u_0 = 1000$

On pourra utiliser les résultats de la ***Partie A***

1) Quel est le montant des dons :

a) En 2017 ?

b) En 2030 ?

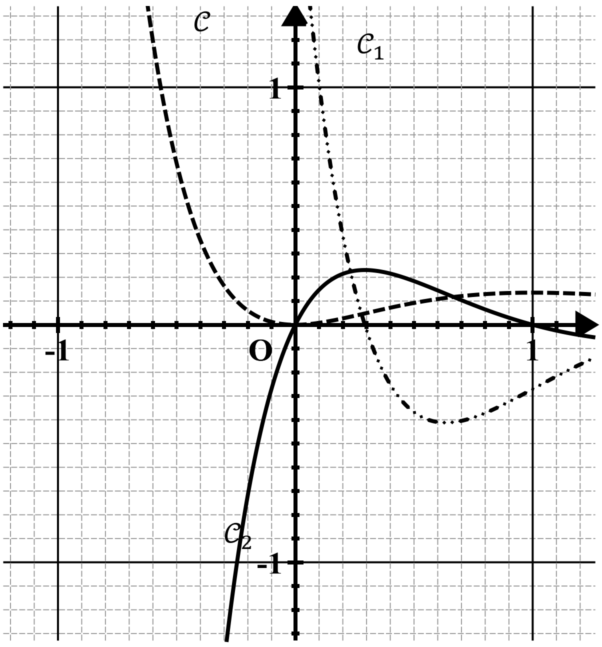
2) Que peut-on dire du montant des dons à long terme ?

3) A partir de quelle année, y aura-t-il au moins 1450 € de dons ?

EXERCICE 3 (6 points)

Partie C

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f, et les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de deux autres fonctions :



Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent la fonction dérivée f' et la fonction dérivée seconde f''.

Mais on ne sait pas laquelle de ces deux courbes représente f' et laquelle représente f''

Quelle est la courbe de f' ? Justifier votre réponse.

Partie D

On considère la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = x^2e^{-2x}$

1) A l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu :

$f(x) := x^2e^{-2x}$
$x \mapsto x^2 * e^{-2x}$
$factoriser\left(dériver\left(f(x)\right)\right)$
$\left(-2 * x * (x-1)\right) * e^{-2x}$
$factoriser\left(dériver\left(dériver\left(f(x)\right)\right)\right)$
$(4 * x^2 - 8 * x + 2) * e^{-2x}$

a) Selon ce logiciel donner les expressions de $f'(x)$ et de $f''(x)$

b) Vérifier par le calcul l'expression de $f'(x)$ donnée par ce logiciel.

2) Etudier les variations de la fonction f sur $[-1; 2]$ puis dresser son tableau de variation

3) Etudier la convexité de la fonction f sur $[-1; 2]$ et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

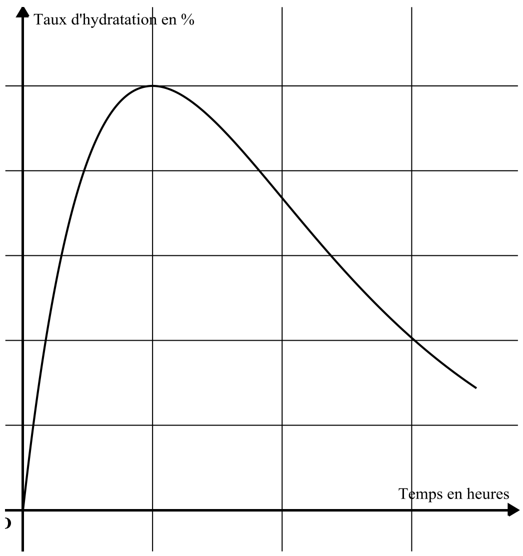
EXERCICE 4 (4 points)

Un laboratoire teste la qualité d'un composant d'une nouvelle crème solaire qui agit comme un réservoir d'hydratation pour la peau exposée au soleil. Pour cela on mesure le taux d'hydratation de la peau t heures après l'application.

On estime que le taux $f(t)$, exprimé en pourcentage, d'hydratation de la peau pour $t \in [0; 7]$ est donné par :

$$f(t) = 50te^{-0,5t+1}$$

On en donne la courbe ci-dessous (mais les unités ont été effacées) et un extrait d'une feuille de tableur :



	A	B
1	0	0,00
2	1	82,44
3	2	100,00
4	3	90,98
5	4	73,58
6	5	55,78
7	6	40,60
8	7	28,73
9		

4) Dans la cellule B1 on a tapé la formule = 50*A1*EXP(−0,5*A1+1) puis on l'a copiée vers le bas.

EXP désigne la fonction exponentielle

Quelle formule lira-t-on dans la cellule B8 ?

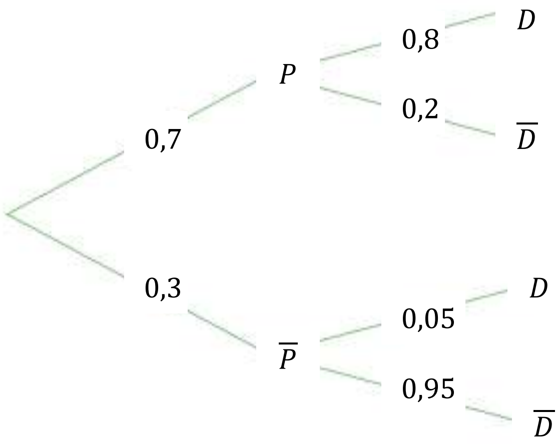
5) On pourra lancer la commercialisation de cette crème si le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % pendant une durée d'au moins 5 h.

Pourra-t-on lancer la commercialisation de cette crème ? Justifier votre réponse.

Correction bac blanc TES

EXERCICE 1 (5 points)

1) L’arbre de probabilité ci-dessous traduit cette situation :



2) On calcule :

$$p(\overline{P} \cap D) = p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(D) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$$

La probabilité que le sonar indique un banc de poisson et qu’il n’y en ait pas est de 0,015

3) D’après la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(P) \times p_P(D) + p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(D) = 0{,}7 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}56 + 0{,}015 = 0{,}575$$

La probabilité que le sonar indique un banc de poisson est égale à 0,575

4) On calcule :

$$p_D(P) = \frac{p(P \cap D)}{p(D)} = \frac{p(P) \times p_P(D)}{p(D)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}8}{0{,}575} = \frac{0{,}56}{0{,}575} = \frac{560}{575} = \frac{112}{115}$$

Sachant que le sonar indique un banc de poisson, la probabilité qu’il y ait effectivement un banc de poisson est de $\frac{112}{115}$

5)

a)

On est en présence d’une expérience de Bernoulli dont le succès est l’événement $\overline{D}$: « Le sonar n’indique pas un banc de poisson un jour donné » de paramètre $p = p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}575 = 0{,}425$

On répète cette expérience de Bernoulli 7 fois de façon indépendante et identique puisque l’on admet que la présence d’un banc de poisson et le fonctionnement du sonar sont indépendant d’un jour sur l’autre.

Enfin X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

On sait alors que X suit la loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = 0{,}425$

b) On calcule :

$$p(X=3)=\binom{7}{3}0{,}425^3\times 0{,}575^{7-3}=35\times 0{,}425^3\times 0{,}575^4\approx 0{,}294$$

Le chalutier repart immédiatement sur une autre zone de pêche exactement trois jours durant cette semaine avec une probabilité d'environ $0{,}294$ à 10^{-3} près

c) On calcule :

$$n-E(X)=n-np=7-7\times 0{,}425=7-2{,}975=4{,}025$$

Sur un grand nombre de sorties en mer le bateau reste sur sa zone de pêche principale en moyenne 4,025 jours par semaine

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1)

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_1 = 0{,}8 \times u_0 + 300 = 0{,}8 \times 1000 + 300 = \boxed{1100} \\ u_2 = 0{,}8 \times u_1 + 300 = 0{,}8 \times 1100 + 300 = \boxed{1180} \end{cases}$$

2)

c) On a : $v_n = u_n - 1500 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1500$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1500 \\ &= 0{,}8 \times u_n + 300 - 1500 \\ &= 0{,}8 \times (v_n + 1500) - 1200 \\ &= 0{,}8v_n + 0{,}8 \times 1500 - 1200 \\ &= 0{,}8v_n + 1200 - 1200 \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$

Ainsi on a pour tout entier naturel n $v_{n+1} = 0{,}8\ v_n$ et $v_0 = u_0 - 1500 = 1000 - 1500 = -500$

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de terme initial $v_0 = -500$

d) La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de terme initial $v_0 = -500$.

On a donc :

$$v_n = v_0 \times q^n = -500 \times 0{,}8^n$$

On a alors :

$$u_n = v_n + 1500 = -500 \times 0{,}8^n + 1500$$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n = 1500 - 500 \times 0{,}8^n}$$

3) On a :

$$0{,}8 \in [0; 1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (1500 - 500 \times 0{,}8^n) = 1500$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1500}$$

4) On peut synthétiser ce qui se passe dans l'algorithme dans le tableau ci-dessous :

U	1000	1100	1180	1244	1295,2	1336,16	1368,93	1395,14	1416,11	1432,89	1446,31	1457,05
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Test $U < 1450$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Ainsi, à la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N contiendra la valeur 11

Partie B

1)

a) En $2017 = 2015 + 2$:

Le montant des dons est $u_2 = \boxed{1180 \text{ €}}$

b) En $2030 = 2015 + 15$,

Le montant des dons est $u_{15} = 1500 - 500 \times 0{,}8^{15} \approx \boxed{1482{,}41 \text{ € à un centime près}}$

2) On a vu dans la **Partie A** que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1500$$

Ainsi, on peut en déduire qu'à long terme le montant annuel des dons sera de 1500 €

3) On a vu dans la **Partie A** que $u_n \geq 1450$ pour la première fois pour $n = 11$

Or la suite $(0{,}8^n)$ est une suite strictement décroissante car $0{,}8 \in]0;1[$ et donc la suite $(1500 - 500 \times 0{,}8^n)$ est strictement croissante car $-500 < 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Cela prouve que $u_n \geq 1450$ pour tout $n \geq 11$

Et donc à partir de 2026, il y aura au moins 1450 € de dons

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

On sait d'après le graphique que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ puis croissante sur $[0;1]$

Or seule la courbe $\mathcal{C}_2$ correspond à une fonction négative sur $]-\infty;0]$ puis positive sur $[0;1]$

Donc la courbe $\mathcal{C}_2$ est la courbe de f' et donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe de f''

Partie B

1)

a) Selon ce logiciel on a :

$$\boxed{f'(x) = -2x(x-1)e^{-2x}}$$

$$\boxed{f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x}}$$

b)

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = (2x - 2x^2)e^{-2x} = \boxed{-2x(x-1)e^{-2x}}$$

2) Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de sa dérivée $f'(x) = -2x(x-1)e^{-2x}$:

Or $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ est du même signe que le trinôme $-2x(x-1)$

Or on sait que le trinôme $-2x(x-1)$ est du signe de $a = -2 < 0$ à l'extérieur des racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

x	-1		0		1		2
Signe de la dérivée f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de la fonction f	e^2	↘	0	↗	e^{-2}	↘	$4e^{-4}$

$f(-1) = (-1)^2e^{-2\times(-1)} = e^2$

$f(0) = 0^2e^{-2\times 0} = 0$

$f(1) = 1^2e^{-2\times 1} = e^{-2}$

$f(2) = 2^2e^{-2\times 2} = 4e^{-4}$

3) Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de sa dérivée seconde $f''(x) = (4x^2 - 8x + 2)e^{-2x}$:

Or $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x)$ est du même signe que le trinôme $4x^2 - 8x + 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times 4\times 2 = 64 - 32 = 32 > 0$$

On sait que le trinôme $4x^2 - 8x + 2$ est du signe de $a = 4 > 0$ à l'extérieur des racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{32}}{2\times 4} = \frac{8-4\sqrt{2}}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}29$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{32}}{2\times 4} = \frac{8+4\sqrt{2}}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}71$$

On a donc :

x	-1		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		2
Signe de la dérivée seconde f''		+	0	$-$	0	+	
Variation de la fonction f'		$\nearrow$	Maximum	$\searrow$	Minimum	$\nearrow$	
Convexité de f		Convexe	Inflexion	Concave	Inflexion	Convexe	

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe sur } \left[-1;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ puis concave sur } \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ et à convexe sur } \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2};2\right]}$$

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ possède deux points d'inflexion en } x=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et en } x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

EXERCICE 4 (4 points)

1)

On lira la formule = 50*A8*EXP(−0,5*A8+1)

2)

<u>Pistes de recherches :</u>

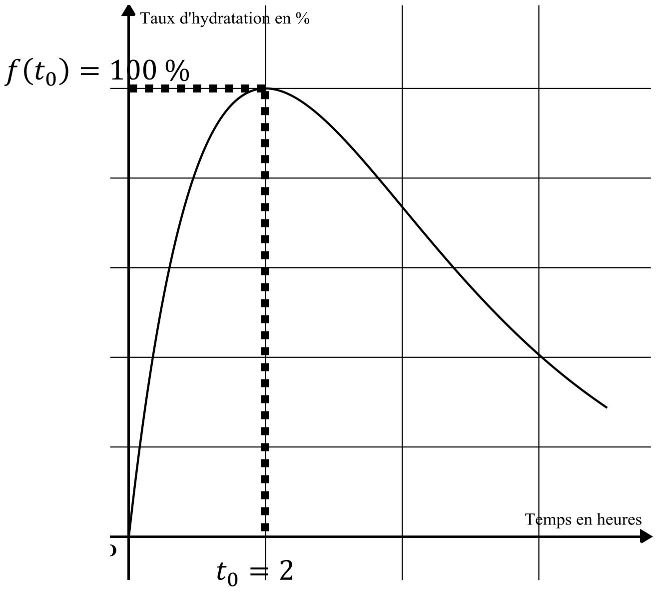
- Graphiquement on peut essayer d'évaluer la durée pendant laquelle le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % mais pour cela il faut d'abord graduer les axes en s'aidant des données de l'énoncé.

D'après la courbe la fonction f est d'abord croissante sur $[0; t_0]$ puis décroissante sur $[t_0; 7]$

On peut en déduire que le taux d'hydratation maximal est atteint à l'instant t_0

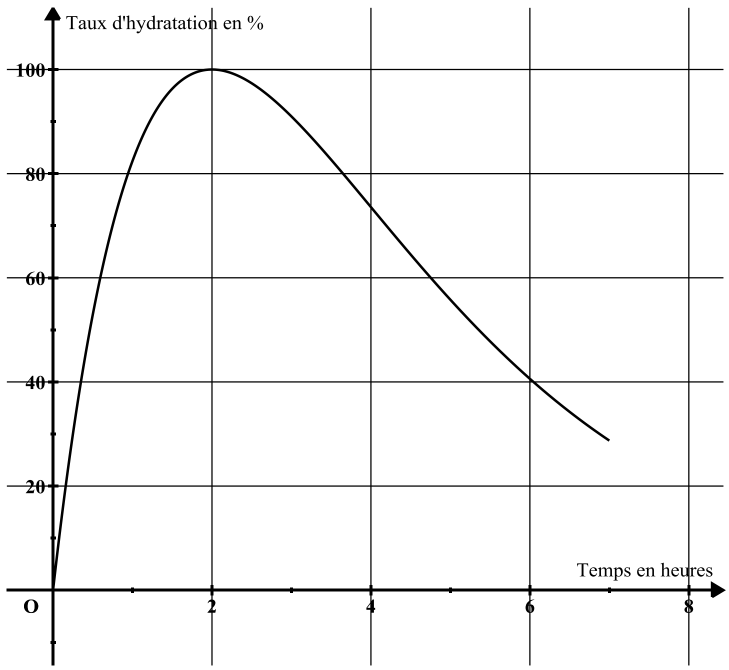
Par ailleurs, d'après le tableur au bout de 2 heures le taux d'hydratation de la peau est de 100 %, ce qui est nécessairement le maximum.

On peut en déduire que $t_0 = 2$ et $f(t_0) = 50t_0e^{-0,5t_0+1} = 50 \times 2e^{-0,5\times 2+1} = 100e^{-1+1} = 100e^0 = 100$

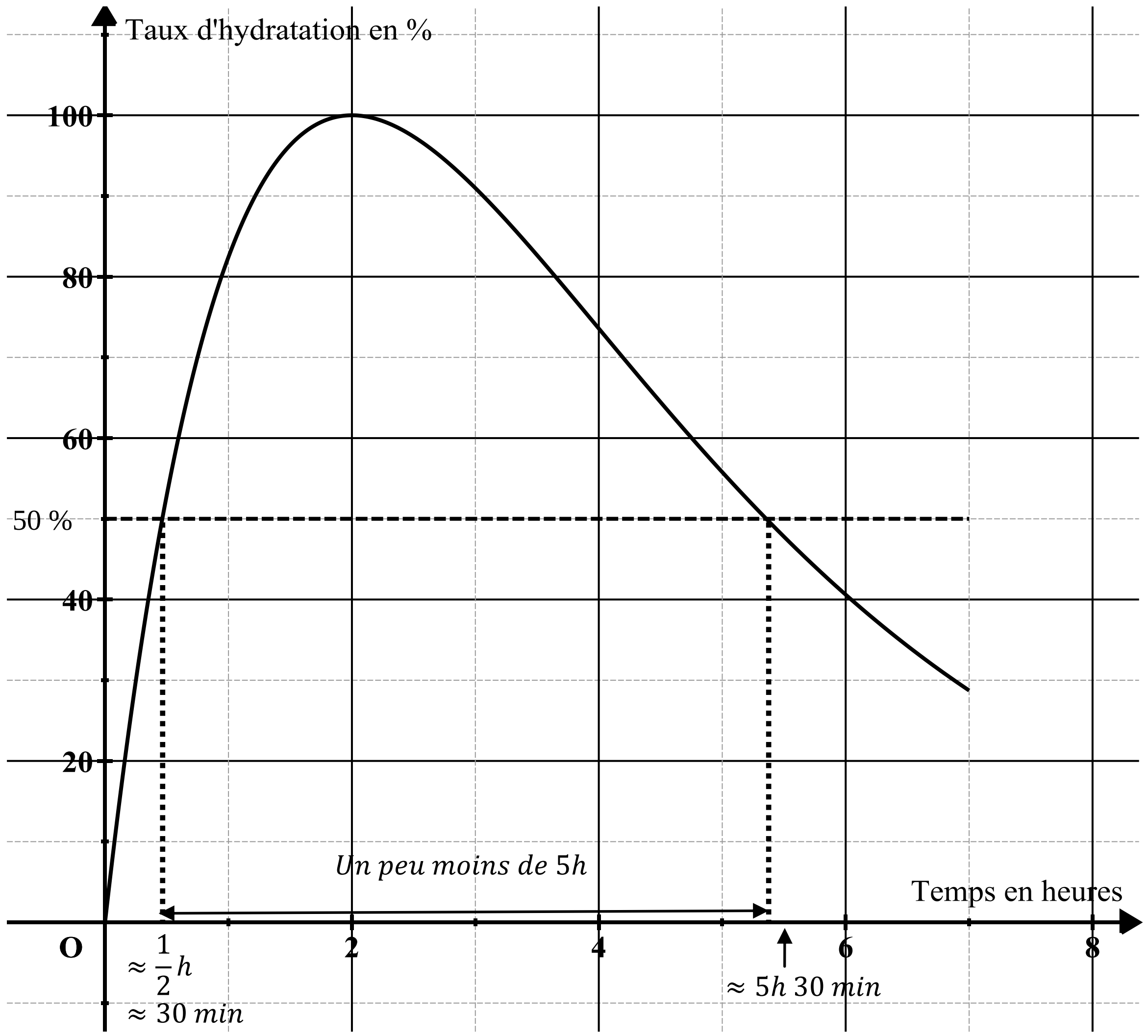


	A	B
1	0	0,00
2	1	82,44
3	2	100,00
4	3	90,98
5	4	73,58
6	5	55,78
7	6	40,60
8	7	28,73
9		

On peut alors graduer les axes :



On peut maintenant résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) > 50$



On peut évaluer graphiquement que la durée pendant laquelle le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % est légèrement inférieur à 5 h.

D'après cette lecture graphique, on ne pourra pas lancer la commercialisation de cette crème.

Néanmoins cette méthode est peu précise.

- On peut étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $[0,7]$

On calcule la dérivée de f :

$$f'(t) = 50e^{-0,5t+1} + 50t(-0,5e^{-0,5t+1})$$
$$= 50e^{-0,5t+1} - 25te^{-0,5t+1}$$
$$= (50 - 25t)e^{-0,5t+1}$$

$$f'(t) = (50 - 25t)e^{-0,5t+1}$$

Etude du signe de la dérivée :

$e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ est du même signe que $50 - 25t$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 50 - 25t > 0$$

$$\Leftrightarrow -25t > -50 \Leftrightarrow t < \frac{-50}{-25} = 2$$

La fonction f est donc d'abord croissante sur $[0; 2]$ puis décroissante sur $[2; 7]$

On peut en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0,7]

x	0		2		7
Signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	
Variation de la fonction f	0	↗	100	↘	$350e^{-\frac{5}{2}}$

$$f(0) = 50 \times 0 \times e^{-0,5\times0+1} = 0\ \%$$

$$f(2) = 50 \times 2 \times e^{-0,5\times2+1} = 100\ \%$$

$$f(7) = 50 \times 7 \times e^{-0,5\times7+1} = 350e^{-\frac{5}{2}} \approx 28{,}73\ \%$$

Ce tableau de variation est cohérent avec ce qui a été fait dans la première piste de recherche, mais si on s'arrête là on ne peut pas conclure.

- Théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[0;2]$ et $[2{,}7]$ pour prouver qu'il y a deux solutions t_1 et t_2 à l'équation $f(t) = 50$

D'après ce qui précède la fonction f est strictement croissante et continue sur $[0;2]$
Par ailleurs :

$$f(0) = 0 < 50$$
$$f(2) = 100 > 50$$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires et son corollaire (ou d'après le théorème de la bijection … ou d'après le tableau de variation …) l'équation $f(t) = 50$ admet exactement une solution t_1 sur $[0;2]$

De même, la fonction f est strictement croissante et continue sur $[2;7]$
Par ailleurs :

$$f(2) = 100 > 50$$
$$f(7) = 350e^{-\frac{5}{2}} \approx 28{,}73 < 50$$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires et son corollaire (ou d'après le théorème de la bijection … ou d'après le tableau de variation …) l'équation $f(t) = 50$ admet exactement une solution t_2 sur $[2;7]$

Cette étude est cohérente avec ce qui a été fait dans la première piste de recherche, mais si on s'arrête là on ne peut toujours pas conclure.

- Utilisation des variations de f pour justifier que le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % pour $t \in]t_1;t_2[$

On peut compléter le tableau de variation de la fonction f

x	0		t_1		2		t_2		7
Variation de la fonction f	0	↗	50	↗	100	↘	50	↘	$350e^{-\frac{5}{2}}$

Le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % sur la plage horaire $]t_1 ; t_2[$ ce qui correspond à une durée $t_2 - t_1$

Pour conclure il faut donc évaluer t_1 et t_2

- On peut évaluer t_1 et t_2 par la méthode par balayage.

<u>Evaluation de t_1 :</u>

D'après le tableur donné dans l'énoncé :

$$\left.\begin{aligned} f(0) = 0 < 50 \\ f(1) \approx 82{,}44 > 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 < t_1 < 1$$

On continue le balayage à la calculatrice:

$$\left.\begin{aligned} f(0{,}4) \approx 44{,}51 < 50 \\ f(0{,}5) \approx 52{,}93 > 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0{,}4 < t_1 < 0{,}5$$

$$\left.\begin{aligned} f(0{,}46) \approx 49{,}675 < 50 \\ f(0{,}47) \approx 50{,}501 > 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0{,}46 < t_1 < 0{,}47$$

t_1 est très proche d'une demi heure : Cohérent avec la lecture graphique.

<u>Evaluation de t_2 :</u>

D'après le tableur donné dans l'énoncé :

$$\left.\begin{aligned} f(5) \approx 55{,}78 > 50 \\ f(6) \approx 40{,}60 < 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5 < t_2 < 6$$

On continue le balayage à la calculatrice:

$$\left.\begin{aligned} f(5{,}3) \approx 50{,}89 > 50 \\ f(5{,}4) \approx 49{,}33 < 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5{,}3 < t_2 < 5{,}4$$

$$\left.\begin{aligned} f(5{,}35) \approx 50{,}11 > 50 \\ f(5{,}36) \approx 49{,}95 < 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5{,}35 < t_2 < 5{,}36$$

t_2 est très proche de 5 h 21 minutes : Cohérent avec la lecture graphique.

Ainsi, la durée pendant laquelle le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % est inférieure à $5{,}36 - 0{,}46 = 4{,}9\ h$

On peut donc affirmer que la durée pendant laquelle le taux d'hydratation de la peau dépasse 50 % est inférieure à 5 h.

On ne pourra pas donc lancer la commercialisation de cette crème.

La méthode graphique est plus rapide mais moins fiable.

En réalité il manque environ 6 minutes pour pouvoir commercialiser la crème.

Peut-on réellement l'évaluer graphiquement sans risque de se tromper ?