Devoir commun de Mathématiques (2 heures)

Ce sujet comporte 8 pages. La page n°8 est à rendre avec la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 3 points

Aucune justification n'est demandée. Pour les questions 1) et 2), une seule réponse est correcte...laquelle ?
Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la bonne affirmation.

1. Voici le tableau de variations d'une fonction f.
Alors :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

a) $f(0)=4$:

Faux : $f(4)=0$ *, on ne peux pas affirmer de manière certaine que* $f(0)=4$.

b) $f(3)<f(5)$:

Faux : f est strictement décroissante donc $f(3)>f(5)$

c) $f(5)\leqslant 0$

Vrai : $4<5$ donc , puisque f est strictement décroissante $f(4)>f(5)$ d'où $0>f(5)$

2. g est une fonction telle que $g(-1)=0,\ g(1)=-3$ et $g(4)=5$.
De plus, g est décroissante sur $[-1;1]$ et croissante sur $[1;4]$. Alors, pour tout réel x de $[-1;4]$:

a) $g(x)\geqslant -3$

On peut résumer avec le tableau :

x	-1		1		4
g	0	↘	-3	↗	5

Donc c'est vrai car -3 est le minimum de g sur $[-1;4]$

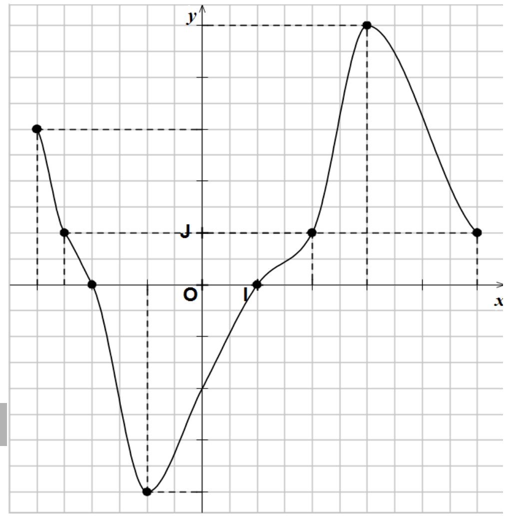
b) $0\leqslant g(x)\leqslant 5$

Faux , puisqu'on peut choisir le contre exemple suivant :
si $x=1$, on a alors $g(x)=-3$ …..

c) $-1\leqslant g(x)\leqslant 4$

Faux , le même contre exemple qu'au **b)** en fait la preuve..

3. Voici la courbe d'une fonction h dans un repère (O, I, J)



a) Donner son tableau de variation.

x	-3		-1		3		5
$f(x)$	3	↘	-4	↗	5	↘	1

b) Résoudre $h(x)=0$

$S=\{-2;1\}$

c) Résoudre $h(x)\geqslant 1$

$S=[-3;-2,5]\cup[2;5]$

d) Recopier et compléter le plus précisément possible :

Si $x\in[-3;0]$ alors $-4\leqslant h(x)\leqslant 3$

Si $x\in[0;5]$ alors $-2\leqslant h(x)\leqslant 5$

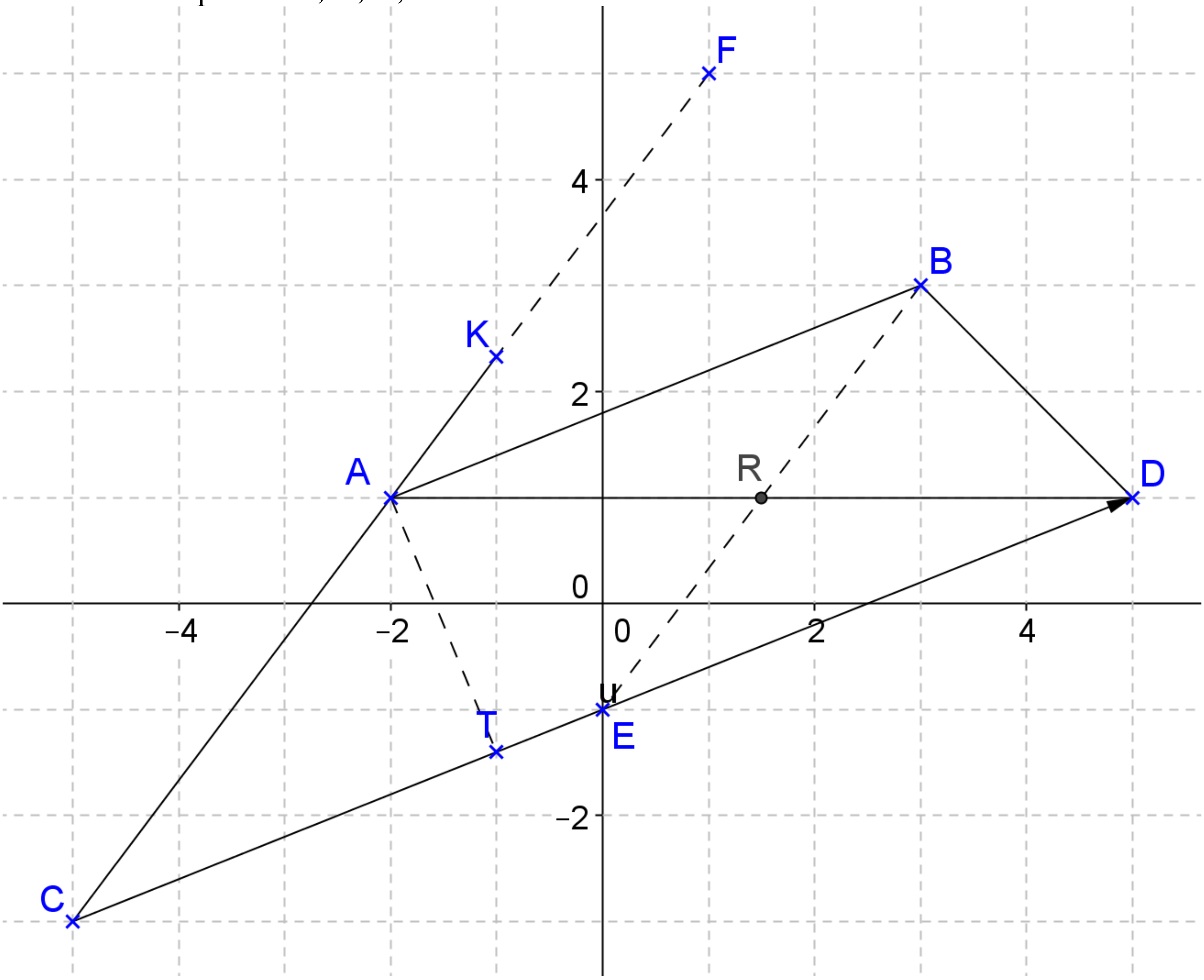
Si $-2\leqslant h(x)\leqslant 0$, alors $-2\leqslant x\leqslant -1,5$ ou $0\leqslant x\leqslant 1$

Exercice 2 7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$.
On donne les points $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C(-5;-3)$, $D(5;1)$ $F(1;5)$ et $K(-1;y)$ où y est un nombre réel que l'on déterminera par la suite.

Un repère est donné en annexe 1, sur lequel on réalisera au fur et à mesure de l'exercice, les constructions demandées.

1. Placer les points A, B, C, D.



2. a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}(5;2)$ et $\overrightarrow{CD}(10;4)$; les produits en croix $5\times4=20$ et $2\times10=20$ sont égaux ce qui prouve la proportionnalité des coordonnées et donc la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ainsi, les droites (AB) et (CD) sont bien parallèles.

Remarque : Il est aussi possible de prouver que les deux droites ont le même coefficient directeur !

b) Le quadrilatère $ABDC$ est il un parallélogramme ? Justifier par le calcul.

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, or les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas égales et donc $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$: ABDC n'est donc pas un parallélogramme...

3. Construire le point T tel que $\vec{CT}=\frac{2}{5}\vec{CD}$

Déterminer par le calcul les coordonnées du point T.

D'une part : $\vec{CT}(x_T-(-5);y_T-(-3))$ donc $\vec{CT}(x_T+5;y_T+3)$.

D'autre part, $\frac{2}{5}\vec{CD}$ a pour coordonnées : $\left(\frac{2}{5}\times 10;\frac{2}{5}\times 4\right)$ donc $\left(4;\frac{8}{5}\right)$

Puisque $\vec{CT}=\frac{2}{5}\vec{CD}$ cela équivaut à l'égalité des coordonnées :

$$\begin{cases} x_T+5=4 \\ y_T+3=\frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T=-1 \\ y_T=-\frac{7}{5} \end{cases} \text{ et donc } T\left(-1;-\frac{7}{5}\right)$$

4. Calculer y de sorte que les points A, C et K soient alignés. Placer le point K.

Les points A, C et K sont alignés si et seulement si $\vec{AC}$ et $\vec{CK}$ sont colinéaires.
Or $\vec{AC}(-3;-4)$ et $\vec{CK}(4;y+3)$ seront colinéaires si et seulement si les produits en croix suivant : $-3\times(y+3)$ et -4×4 sont égaux , c'est dire que $-3\times(y+3)=-16$

Cette équation se résout : $-3y-9=-16 \Leftrightarrow y=\frac{7}{3}$.

Finalement : $K\left(-1;\frac{7}{3}\right)$

5. Soit R le milieu de $[AD]$ et E le symétrique de B par rapport à R.

a) Calculer les coordonnées des points R et de E, puis les placer.

$x_R=\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}$; $y_R=\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{1+1}{2}=1$ donc $R\left(\frac{3}{2};1\right)$.

Comme R est le milieu de $[BE]$ nous avons également :

$x_R=\frac{x_B+x_E}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}=\frac{3+x_E}{2}$ et donc $3=3+x_E\Leftrightarrow x_E=0$.

Puis $y_R=\frac{y_B+y_E}{2}\Leftrightarrow 1=\frac{3+y_E}{2}\Leftrightarrow 2=3+y_E\Leftrightarrow -1=y_E$ Ainsi $E(0;-1)$

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDE$? Justifier votre réponse.

Puisque R est milieu des diagonales $[AD]$ et $[BE]$, le quadrilatère est donc un parallélogramme.

6. On considère l'algorithme suivant :

a) Qu'affiche l'algorithme si on saisit les coordonnées des points A ,C et F de l'exercice ?

Il affiche OUI

b) Que permet de faire cet algorithme ? Justifier.

Il permet de savoir si les coefficients directeurs des droites (AC) et (CF) sont égaux ou non ;
s'ils le sont , cela revient donc à dire que ces droites sont parallèles et confondues et donc si l'algorithme affiche OUI , c'est que les points A,C et F sont alignés. **(ce** qui **est le cas dans le 6.a))**

VARIABLES:
$x_A, y_A, x_C, y_C, x_F, y_F$, p et q des nombres

ENTRÉE:
SAISIR $x_A, y_A, x_C, y_C, x_F, y_F$

TRAITEMENT:
AFFECTER À p LA VALEUR $\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}$
AFFECTER À q LA VALEUR $\frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}$
SI $p=q$ ALORS
| Afficher OUI
SINON
| Afficher NON
FIN SI

Exercice 3 4 points

Un hôtel de vacances propose deux types de bungalow (bungalow avec kitchenette ou bungalow sans kitchenette) à louer à la semaine.

Pour les clients qui le souhaitent, l'hôtel propose deux formules de restauration au choix :

- Formule A : petit déjeuner seul,
- Formule B : petit déjeuner et dîner.

Pour chaque semaine de location, chaque client décide s'il prend une formule de restauration et si oui, choisit entre les formules A et B.

Le gestionnaire de l'hôtel a constaté que sur 200 clients :

- 60 clients choisissent la formule B.
- 88 clients ne prennent aucune formule de restauration.
- 120 clients optent pour un bungalow avec kitchenette
- 24 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et la formule A.
- 12 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et la formule B

1. a) Compléter **sur le document annexe 2**, le tableau des effectifs.

	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A	**24**	**28**	**52**
Formule B	**12**	**48**	**60**
Aucune formule	**84**	**4**	**88**
Total	**120**	**80**	**200**

b) Vérifier que 95 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A ou la formule B

Il y a 80 personnes qui prennent un bungalow sans kitchenette. Parmi ceux-ci $28+48=76$ prennent la formule A ou B. $\frac{76}{80}=0{,}95$. Donc 95 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A ou la formule B

2. On interroge au hasard un client au sujet de ses choix, chaque client ayant la même probabilité d'être choisi *(les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)*

a) Déterminer la probabilité de E : « Le client a choisi la formule B ».

$$P(E)=\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$$

b) Déterminer la probabilité de F : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ».

$$P(F)=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$$

c) Écrire en français l'événement $E\cap F$? En déterminer sa probabilité.

$E\cap F$ est l'événement : "le client a choisi la formule B sans kitchenette"

$$P(E\cap F)=\frac{48}{200}=\frac{6}{25}$$

d) Déterminer la probabilité de G : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisi la formule B »

$$P(G)=\frac{80+60-48}{200}=\frac{92}{200}=\frac{23}{50}$$

e) Déterminer la probabilité de H : «Le client a choisi une formule de restauration ».

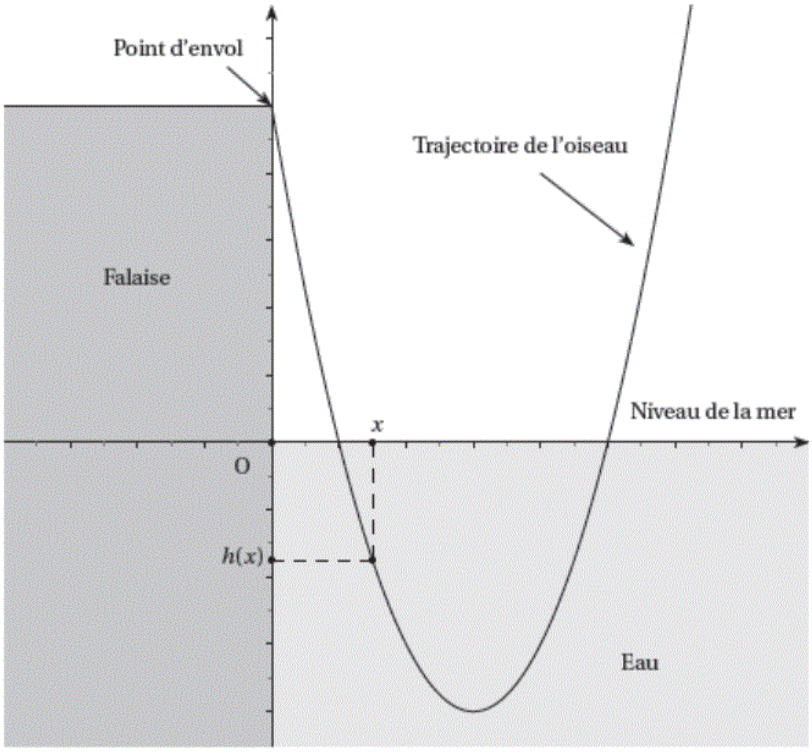
$$P(H)=\frac{52+60}{200}=\frac{112}{200}=\frac{14}{25}$$

f) Déterminer la probabilité de R : «Le client n'a pas choisi la formule B »

$$P(R)=1-P(E)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

Exercice 4 — 6 points

Un oiseau se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis une falaise.
On note x la distance, en mètres, qui sépare l'oiseau de l'abrupt de la falaise, et $h(x)$ l'altitude (éventuellement négative), en mètres, de ce dernier par rapport au niveau de l'eau.
La situation est illustrée sur le schéma suivant, où le repère choisi a pour origine le point O, pied de la falaise, le niveau de l'eau pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées, l'abrupt de la falaise.



Le dessin n'est pas à la bonne échelle. Il ne faut donc pas faire de lecture graphique dans cet exercice

On admet que l'expression de $h(x)$ est donnée par : $h(x)=x^2-4x+3$ pour x réel positif.
La trajectoire de l'oiseau peut donc être assimilée à une parabole qui est ainsi la courbe représentative C_h de la fonction h.

1. Quelle est la hauteur du point d'envol ? Justifier.

La position de l'oiseau au point d'envol se situe sur l'axe des ordonnées et sur la courbe de h donc en $x=0$ et $y=h(0)$: la hauteur de l'oiseau est donc alors : $h(0)=3$

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$h(x)=(x-1)(x-3) \text{ et } h(x)=(x-2)^2-1$$

D'une part : $(x-1)(x-3)=x^2-3x-x+3=x^2-4x+3=h(x)$ et
d'autre part : $(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=x^2-4x+3=h(x)$

3. Résoudre l'équation $h(x)=0$.
Que représentent les solutions de cette équation pour la trajectoire de l'oiseau?

Avec la forme factorisée : $h(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$
Ces 2 solutions indiquent à quel moment l'oiseau traverse la surface de l'eau : lorsqu'il est à 1 mètre ou à 3 mètres de l'abrupt de la falaise.

4. Résoudre l'inéquation $h(x)\leqslant 0$.
Que représentent les solutions de cette inéquation pour la trajectoire de l'oiseau ?

Avec la forme factorisée , on peut étudier le signe de $h(x)$ sur $[0;+\infty[$ dans un tableau de signe en réutilisant les valeurs de x qui annulent chaque facteur :

x	0		1		3		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $S=[1;3]$ ce qui signifie que l'oiseau est en dessous de la surface de l'eau lorsqu'il est à une distance comprise entre 1 et 3 mètres par rapport à l'abrupt de la falaise.

5. Après être ressorti de l'eau, à quelle distance de la falaise l'oiseau atteint-il l'altitude de 3 m ? Justifier votre réponse.

On peut chercher à résoudre $h(x)=3$ ce qui équivaut à $x^2-4x+3=3 \Leftrightarrow x^2-4x=0$.
Par factorisation du 1er membre l'équation devient : $x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$.
Ainsi , la hauteur de l'oiseau vaut 3 mètres au point d'envol (voir **1.**) ou ou après être ressorti de l'eau à 4 mètres de l'abrupt de la falaise.

6. a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole C_h.

On peut utiliser, par exemple, les points où l'oiseau est à 3 mètres au dessus du niveau de l'eau qui sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la parabole de la fonction h .
Ainsi, l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x=2$ car c'est l'abscisse valeur milieu de $x=0$ et $x=4$.
Il reste alors à calculer la valeur $h(2)=(2-2)^2-1=-1$ ce qui donne le sommet $S(2;-1)$.

Remarque : D'autres méthodes sont possibles , on peut par exemple retrouver la valeur du minimum en s'appuyant sur la forme canonique de h : $h(x)=(x-2)^2-1$

b) En déduire le tableau de variations complet de h sur l'intervalle $[0;4]$.

Comme le coefficient du x^2 vaut $1>0$, on justifie que h a bien une parabole orientée comme celle de la fonction carrée ; les coordonnées du sommet établie avant nous permettent d'indiquer les valeurs du tableau de variations.

x	0	2	4
$h(x)$	3 ↘	-1	↗ 3

c) Quelle est alors la profondeur maximale atteinte par l'oiseau ?

Nombre de clients ayant choisi :	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A			
Formule B			**60**
Aucune formule de restauration			
Total			**200**

Cette profondeur correspond à l'extremum de h qui vaut -1 *(mètre)*.