Devoir commun de Mathématiques (2 heures)

Ce sujet comporte 8 pages. La page n°8 est à rendre avec la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 4 points

Un restaurant sur la plage propose trois types de menu (menu A , menu B et menu C).
Pour les clients qui le souhaitent, le restaurant propose deux lieux:

- Formule I : manger à l'intérieur du restaurant,
- Formule T : manger en terrasse.

Chaque client décide s'il mange à l'intérieur ou en terrasse.
Le gestionnaire du restaurant a constaté que sur 300 clients :

- 90 clients choisissent le menu B.
- 132 clients choisissent le menu C.
- 180 clients optent pour manger en terrasse
- 36 clients optent pour manger à l'intérieur avec le menu A.
- 18 clients optent pour manger en terrasse avec le menu B

1. a) Compléter **sur le document annexe 1**, le tableau des effectifs.

Nombre de clients ayant choisi :	Intérieur du restaurant	Terrasse	Total
Menu A	**36**	**42**	**78**
Menu B	**72**	**18**	**90**
Menu C	**12**	**120**	**132**
Total	**120**	**180**	**300**

b) Vérifier que 40 % des clients ayant choisi de manger à l'intérieur prennent le menu A ou le menu C

Il y a 120 personnes qui mangent à l'intérieur. Parmi ceux-ci 48 prennent le menu A ou C. $\frac{48}{120}=0,4$. Donc 40 % des clients ayant choisi de manger à l'intérieur prennent le menu A ou le menu C

2. On interroge au hasard un client au sujet de ses choix, chaque client ayant la même probabilité d'être choisi *(les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)*

a) Déterminer la probabilité de B : « Le client a choisi le menu B ».

$P(B)=\frac{90}{300}=\frac{3}{10}$

b) Déterminer la probabilité de I : « Le client mange à l'intérieur ».

$P(I)=\frac{120}{300}=\frac{2}{5}$

c) Écrire en français l'événement $I\cap B$? En déterminer sa probabilité.

$I\cap B$ Est l'événement : " la personne choisi le menu B et mange à l'intérieur.

$$P(I \cap B) = \frac{72}{300} = \frac{6}{25}$$

d) Déterminer la probabilité de G : « Le client a mangé en terrasse ou a choisi le menu B »

$$P(G) = \frac{180+90-18}{300} = \frac{252}{300} = \frac{21}{25}$$

e) Déterminer la probabilité de H : « Le client a choisi le menu A ou B ».

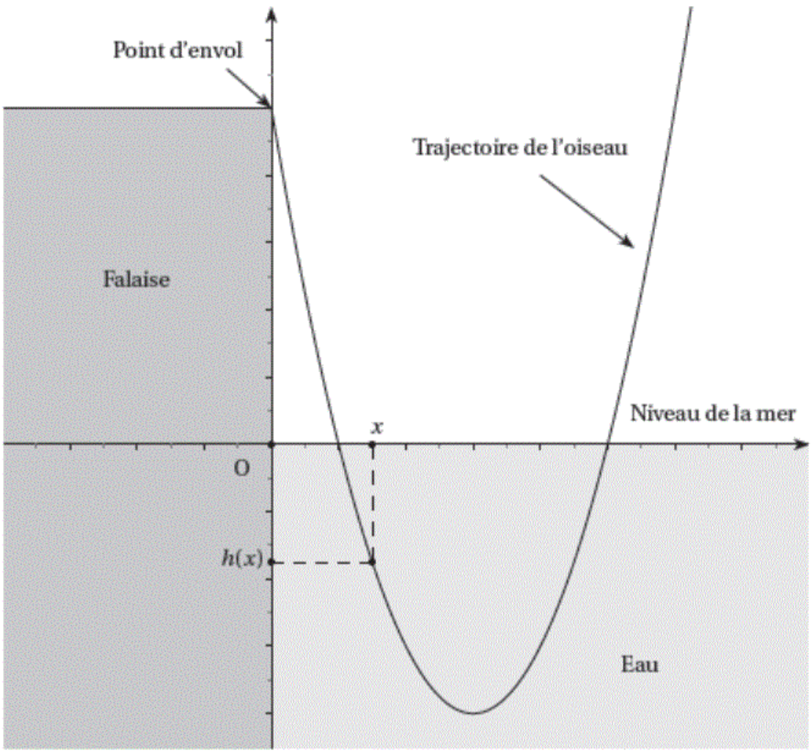
$$P(H) = \frac{78+90}{300} = \frac{168}{300} = \frac{14}{25}$$

f) Déterminer la probabilité de R : « Le client n'a pas choisi la formule B ».

$$P(R) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Exercice 2 **6 points**

Un oiseau se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis une falaise.
On note x la distance, en mètres, qui sépare l'oiseau de l'abrupt de la falaise, et $h(x)$ l'altitude (éventuellement négative), en mètres, de ce dernier par rapport au niveau de l'eau.
La situation est illustrée sur le schéma suivant, où le repère choisi a pour origine le point O, pied de la falaise, le niveau de l'eau pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées, l'abrupt de la falaise. On admet que l'expression de $h(x)$ est donnée par : $h(x)=x^2-8x+15$ pour x réel positif.
La trajectoire de l'oiseau peut donc être assimilée à une parabole qui est ainsi la courbe représentative C_h de la fonction h.



Le dessin n'est pas à la bonne échelle. Il ne faut donc pas faire de lecture graphique dans cet exercice

1. Quelle est la hauteur du point d'envol ? Justifier.

La position de l'oiseau au point d'envol se situe sur l'axe des ordonnées et sur la courbe de h donc en $x=0$ et $y=h(0)$: la hauteur de l'oiseau est donc alors : $h(0)=15$

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$h(x)=(x-3)(x-5) \text{ et } h(x)=(x-4)^2-1$$

D'une part : $(x-3)(x-5)=x^2-5x-3x+15=x^2-8x+15=h(x)$ et
d'autre part : $(x-4)^2-1=x^2-8x+16-1=x^2-8x+15=h(x)$

3. Résoudre l'équation $h(x)=0$.
Que représentent les solutions de cette équation pour la trajectoire de l'oiseau?

Avec la forme factorisée : $h(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=5$
Ces 2 solutions indiquent à quel moment l'oiseau traverse la surface de l'eau : lorsqu'il est à 3 mètres ou à 5 mètres de l'abrupt de la falaise.

4. Résoudre l'inéquation $h(x)\geqslant 0$.
Que représentent les solutions de cette inéquation pour la trajectoire de l'oiseau ?

Avec la forme factorisée , on peut étudier le signe de $h(x)$ sur $[0;+\infty[$ dans un tableau de signe en réutilisant les valeurs de x qui annulent chaque facteur :

x	0		3		5		$+\infty$
$(x-3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $S=[3;5]$ ce qui signifie que l'oiseau est en dessous de la surface de l'eau lorsqu'il est à une distance comprise entre 3 et 5 mètres par rapport à l'abrupt de la falaise.

5. Après être ressorti de l'eau, à quelle distance de la falaise l'oiseau atteint-il l'altitude de 15 m ? Justifier votre réponse.

On peut chercher à résoudre $h(x)=15$ ce qui équivaut à $x^2-8x+15=15 \Leftrightarrow x^2-8x=0$.
Par factorisation du 1er membre l'équation devient : $x(x-8)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=8$.
Ainsi , la hauteur de l'oiseau vaut 15 mètres au point d'envol (voir **1.**) ou après être ressorti de l'eau à 8 mètres de l'abrupt de la falaise.

6. a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole C_h.

On peut utiliser, par exemple, les points où l'oiseau est à 15 mètres au dessus du niveau de l'eau qui sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la parabole de la fonction h .
Ainsi, l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x=4$ car c'est l'abscisse valeur milieu de $x=0$ et $x=8$.
Il reste alors à calculer la valeur $h(2)=(4-4)^2-1=-1$ ce qui donne le sommet $S(4;-1)$.

Remarque : D'autres méthodes sont possibles , on peut par exemple retrouver la valeur du minimum en s'appuyant sur la forme canonique de h : $h(x)=(x-4)^2-1$

b) En déduire le tableau de variations complet de h sur l'intervalle $[0;8]$.

Comme le coefficient du x^2 vaut $1>0$, on justifie que h a bien une parabole orientée comme celle de la fonction carrée ; les coordonnées du sommet établie avant nous permettent d'indiquer les valeurs du tableau de variations.

x	0		4		8
$h(x)$	15	↘	-1	↗	15

c) Quelle est alors la profondeur maximale atteinte par l'oiseau ?

Cette profondeur correspond à l'extremum de h qui vaut -1 *(mètre).*

Exercice 3 **3 points**

Aucune justification n'est demandée. Pour les questions 1) et 2), une seule réponse est correcte...laquelle ? Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la bonne affirmation.

1. Voici le tableau de variations d'une fonction f. Alors :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

a) $f(3)=0$

Vrai , c'est la seule valeur indiquée dans le tableau.

b) $f(4)< f(5)$

Faux : f est strictement décroissante et $4< 5$ donc $f(4)> f(5)$

c) $f(4)\geqslant 0$

Faux : $4> 3$ et f strictement décroissante donne $f(4)< f(3)$ et comme $f(3)=0$, il vient $f(4)< 0$

2. g est une fonction telle que $g(-2)=1$, $g(0)=-3$ et $g(5)=4$.
De plus, g est décroissante sur $[-2;0]$ et croissante sur $[0;5]$.

Alors, pour tout réel x de $[-2;5]$:

On peut construire le tableau de variations :

x	-2		0		5
$g(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	4
			-3		

a) $g(x)\geqslant -2$

Faux : Contre exemple : si $x=0$

alors $g(x)=-3$

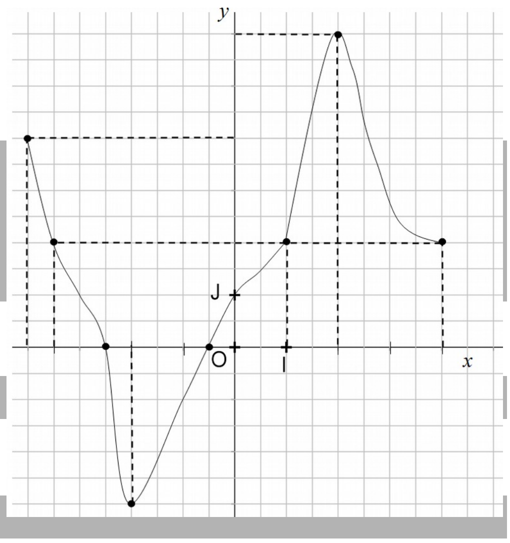
b) $-3\leqslant g(x)\leqslant 4$

Vrai , d'après le tableau , le minimum vaut -3 et la maximum vaut 4 .

c) $0\leqslant g(x)\leqslant 5$

Faux : car le minimum vaut -3 et non pas 0....

3. Voici la courbe d'une fonction h dans un repère (O, I, J)



a) Donner son tableau de variations.

x	-4		-2		2		4
$h(x)$	4	↘	-3	↗	6	↘	2

b) Résoudre $h(x)=0$

$S=\{-2,5;-0,5\}$

c) Résoudre $h(x)\geqslant 2$

$S=[-4;-3,5]\cup[1;4]$

d) Recopier et compléter le plus précisément possible :

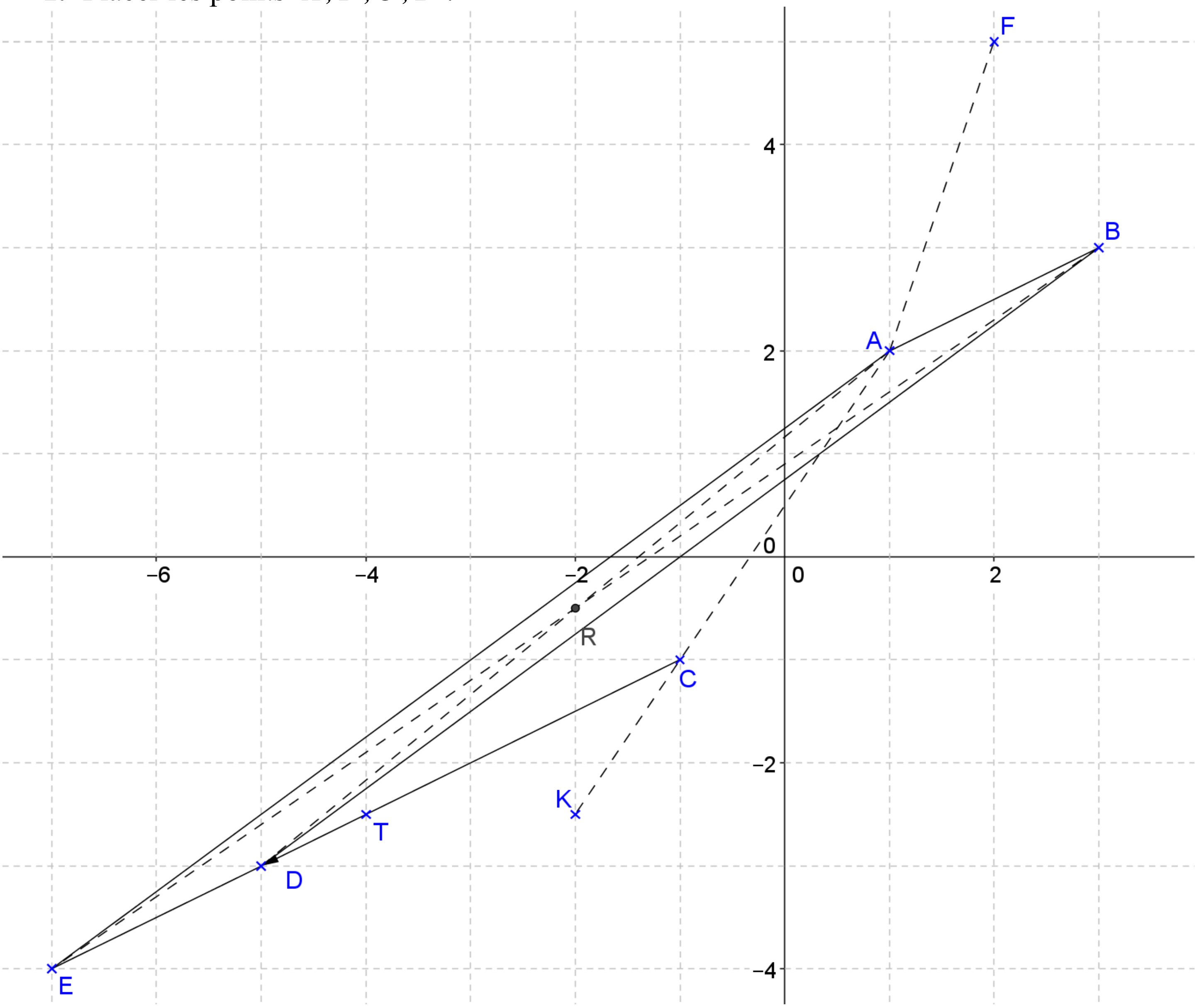
Si $x\in[-4;0]$ alors $-3\leqslant h(x)\leqslant 4$
Si $x\in[0;4]$ alors $1\leqslant h(x)\leqslant 6$
Si $0\leqslant h(x)\leqslant 1$, alors $-3\leqslant x\leqslant -2{,}5$ ou $-0{,}5\leqslant x\leqslant 0$

Exercice 4 — 7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
On donne les points $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(-1;-1)$, $D(-5;-3)$, $F(2;5)$ et $K(-2;y)$ où y est un nombre réel que l'on déterminera par la suite.

Un repère est donné en annexe 2, sur lequel on réalisera au fur et à mesure de l'exercice, les constructions demandées.

1. Placer les points A, B, C, D.



2. **a)** Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}(2;1)$ et $\overrightarrow{DC}(4;2)$; les produits en croix $2\times 2=4$ et $1\times 4=4$ sont égaux ce qui prouve la proportionnalité des coordonnées et donc la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Ainsi, les droites (AB) et (CD) sont bien parallèles.

Remarque : Il est aussi possible de prouver que les deux droites ont le même coefficient directeur !

b) Le quadrilatère $ABCD$ est il un parallélogramme ? Justifier par le calcul.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, or les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas égales et donc $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$: $ABCD$ n'est donc pas un parallélogramme...

3. Construire le point T tel que $\overrightarrow{CT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

Déterminer par le calcul les coordonnées du point T.

D'une part : $\overrightarrow{\mathrm{CT}}\left(x_{\mathrm{T}}-(-1);y_{\mathrm{T}}-(-1)\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{CT}}\left(x_{\mathrm{T}}+1;y_{\mathrm{T}}+1\right)$.

D'autre part, $\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a pour coordonnées : $\left(\frac{3}{4}\times(-4);\frac{3}{4}\times(-2)\right)$ donc $\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$

Puisque $\overrightarrow{CT}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ cela équivaut à l'égalité des coordonnées :

$$\begin{cases}x_{\mathrm{T}}+1=-3\\ y_{\mathrm{T}}+1=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{\mathrm{T}}=-4\\ y_{\mathrm{T}}=-\frac{5}{2}\end{cases}\text{ et donc } \mathrm{T}\left(-4;-\frac{5}{2}\right)$$

4. Calculer y de sorte que les points A, C et K soient alignés. Placer le point K.

Les points A, C et K sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2;-3)$ et $\overrightarrow{\mathrm{CK}}(-1;y+1)$ seront colinéaires si et seulement si les produits en croix suivant : $-2\times(y+1)$ et $-3\times(-1)$ sont égaux, c'est dire que $-2\times(y+1)=3$

Cette équation se résout : $-2y-2=3 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{2}$.

Finalement : $\mathrm{K}\left(-2;-\frac{5}{2}\right)$

5. Soit R le milieu de $[AD]$ et E le symétrique de B par rapport à R.

a) Calculer les coordonnées des points R et de E, puis les placer.

$x_{\mathrm{R}}=\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{D}}}{2}=\frac{1+(-5)}{2}=-2$; $y_{\mathrm{R}}=\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{D}}}{2}=\frac{2+(-3)}{2}=-0{,}5$ donc $\mathrm{R}(-2;-0{,}5)$.

Comme R est le milieu de $[\mathrm{BE}]$ nous avons également :

$x_{\mathrm{R}}=\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{E}}}{2}\Leftrightarrow-2=\frac{3+x_{\mathrm{E}}}{2}$ et donc $-4=3+x_{\mathrm{E}}\Leftrightarrow x_{\mathrm{E}}=-7$.

Puis $y_{\mathrm{R}}=\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{E}}}{2}\Leftrightarrow-0{,}5=\frac{3+y_{\mathrm{E}}}{2}\Leftrightarrow-1=3+y_{\mathrm{E}}\Leftrightarrow-4=y_{\mathrm{E}}$ Ainsi $\mathrm{E}(-7;-4)$

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDE$? Justifier votre réponse.

Puisque R est milieu des diagonales $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{BE}]$, le quadrilatère est donc un parallélogramme.

6. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES:
$x_A, y_A, x_C, y_C, x_F, y_F$, p et q des nombres

ENTRÉE:
Saisir $x_A, y_A, x_C, y_C, x_F, y_F$

TRAITEMENT:
Affecter à p la valeur $\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}$
Affecter à q la valeur $\frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}$
Si $p=q$ Alors
| Afficher OUI
Sinon
| Afficher NON
Fin Si

a) Qu'affiche l'algorithme si on saisit les coordonnées des points A, C et F de l'exercice ?

Il affiche NON

b) Que permet de faire cet algorithme ? Justifier.

Il permet de savoir si les coefficients directeurs des droites (AC) et (CF) sont égaux ou non ;
s'ils le sont, cela revient donc à dire que ces droites sont parallèles et confondues et donc si l'algorithme affiche OUI, c'est que les points A,C et F sont alignés.
(ce qui n'est pas le cas dans le **6.a)**)