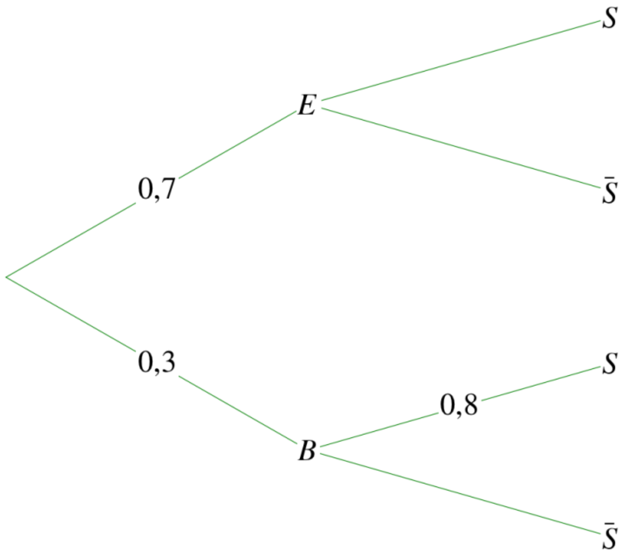
Correction du bac blanc

Exercice 1

Partie A

1)



2)

a)

$B \cap S$ est l'événement : « Le questionnaire est celui d'un client satisfait et ayant choisi la destination Brésil »

$$p(B \cap S) = p_B(S) \times p(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24}$$

b) On a :

$$p(S) = p(E \cap S) + p(B \cap S)$$

$$\Leftrightarrow 0{,}72 = p(E \cap S) + 0{,}24$$

$$\Leftrightarrow p(E \cap S) = 0{,}72 - 0{,}24 = \boxed{0{,}48}$$

c) On a :

$$p_E(S) = \frac{p(E \cap S)}{p(E)} = \frac{0{,}48}{0{,}7} = \frac{48}{70} = \boxed{\frac{24}{35}}$$

3) On calcule :

$$p_S(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}24}{0{,}72} = \frac{24}{72} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Partie B

On considère l'expérience de Bernoulli dont l'événement succès S est « On a choisi le questionnaire d'un client satisfait ». C'est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}72$

En prélevant successivement au hasard n questionnaires, on répète cette expérience n fois de manière indépendante et identique car le nombre de questionnaire est suffisamment élevé pour que l'on puisse considérer que l'on fait un tirage successif avec remise.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de questionnaires de clients satisfaits, lors de ce prélèvement. On sait alors que X suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}72$

1) Ici X suit la loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0{,}72$

a) « Les quatre questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » est l'événement $(X = 0)$

$$p(X = 0) = 0{,}28^4 \approx \boxed{0{,}006 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$$

b) « Au moins deux questionnaires sont ceux de clients satisfaits » est l'événement $(X \geq 2)$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0{,}28^4 - 4 \times 0{,}72 \times 0{,}28^3 \approx \boxed{0{,}931 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$$

2)

a)

<u>**1° méthode :**</u> On détaille les étapes de l'algorithme

n	1	2	3	4	5	6
$1 - 0{,}28^n$	0,72	0,9216	0,978048	0,99385344	0,99827896	0,99951811
Test $1 - 0{,}28^n < 0{,}999$	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX

L'algorithme affichera donc $\boxed{n = 6}$

<u>**2° méthode :**</u> On résout l'inéquation

$$1 - 0{,}28^n < 0{,}999$$

$$\Leftrightarrow 0{,}28^n > 1 - 0{,}999 = 0{,}001$$

$$\Leftrightarrow ln(0{,}28^n) > ln(0{,}001)$$

$$\Leftrightarrow n\, ln(0{,}28) > ln(0{,}001)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{ln(0{,}001)}{ln(0{,}28)} \text{ } car\ ln(0{,}28) < 0$$

Or

$$\frac{ln(0{,}001)}{ln(0{,}28)} \approx 5{,}42$$

Ainsi, n étant un entier, on a $1 - 0{,}28^n < 0{,}999 \Leftrightarrow n \leq 5$

L'algorithme affichera donc $\boxed{n = 6}$

b) Dans l'algorithme $1 - 0{,}28^n$ est la probabilité de l'événement « au moins l'un des questionnaires prélevés est celui d'un client satisfait ».

La valeur affichée par l'algorithme signifie que l'on doit prélever au moins 6 questionnaires pour que la probabilité qu'au moins l'un des questionnaires prélevés soit celui d'un client satisfait soit d'au moins 0,999

Exercice 2

Tout d'abord on va déterminer quelle courbe correspond à la fonction g

La fonction correspondant à la courbe C_2 est négative sur $[0;1]$ alors que la fonction correspondant à la courbe C_1 est croissante sur $[0;1]$

Ce qui contredirait que la courbe C_2 corresponde à la fonction dérivée g' et la courbe C_1 corresponde à la fonction g

On peut en déduire que **la courbe C_2 correspond à la fonction g et la courbe C_1 correspond à la fonction dérivée g'**

On a donc :

$$g(0) = -3 \qquad g(3) = 0 \qquad g'(0) = -\frac{1}{2} \qquad g'(1) = 0$$

Or $g(x) = (ax + b)e^{kx}$

$$g(0) = -3$$
$$\Leftrightarrow (a \times 0 + b)e^{k\times 0} = -3$$
$$\Leftrightarrow b = -3$$

Ensuite :

$$g(3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (3a - 3)e^{3k} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3a - 3 = 0 \; car \; e^{3k} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1$$

On a donc $g(x) = (x - 3)e^{kx}$, d'où :

$$g'(x) = e^{kx} + (x - 3)ke^{kx}$$

Enfin :

$$g'(0) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow e^{k\times 0} + (0 - 3)ke^{k\times 0} = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 1 - 3k = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3k = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

On a donc $\boxed{g(x) = (x - 3)e^{\frac{x}{2}}}$

On peut se servir de la quatrième donnée pour contrôler le résultat :

$$g'(x) = e^{\frac{x}{2}} + (x - 3) \times \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}} = \frac{2 + x - 3}{2}\, e^{\frac{x}{2}} = \frac{x - 1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}$$

$$g'(1) = \frac{1 - 1}{2} \times e^{\frac{1}{2}} = 0$$

Le résultat est donc bien cohérent.

Exercice 3

Partie A

1)

En $-\infty$:

$$g(x) = e^x - xe^x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x - xe^x + 1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1}$$

En $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^x + 1 = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2)

$$g(x) = (1-x)e^x + 1$$

La fonction $x \to (1-x)e^x$ est le produit de la fonction affine $x \to 1 - x$ est de la fonction exponetielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $x \to (1-x)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction g est la somme de la fonction $x \to (1-x)e^x$ et de la fonction constante $x \to 1$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = (-1) \times e^x + (1-x)e^x = (-1 + 1 - x)e^x = -xe^x$$

On va maintenant étudier le signe de la dérivée

Or $e^x > 0$, donc $g'(x)$ est du même signe que $-x$ et : $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Enfin $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ car\ e^x \neq 0$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante sur }]-\infty; 0] \text{ puis strictement croissante sur } [0; +\infty[}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de la dérivée $-x$		$+$	0	$-$	
Signe de la dérivée g'		$+$	0	$-$	
Variation de la fonction g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$$g(0) = (1-0)e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

3)

a) On a prouvé à la question **2)** que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

On se place sur l'intervalle $]-\infty; 0]$:

D'après l'étude des variations et la limite de g en $+\infty$, on peut en déduire que 1 est un minorant de g sur $]-\infty; 0]$

Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]-\infty; 0]$

On se place sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

La fonction g est continue et strictement croissante.

De plus

$$g(0) = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

$$0 \in]-\infty; 2[$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $\mathrm{g}(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$

En conclusion, $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{g}(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}}$, et on sait que $\alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{r} g(1) = 1 > 0 \\ g(2) \approx -6{,}4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \alpha < 2$$

$$\left.\begin{array}{r} g(1{,}2) \approx 0{,}336 > 0 \\ g(1{,}3) \approx -0{,}101 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}2 < \alpha < 1{,}3$$

$$\left.\begin{array}{r} g(1{,}27) \approx 0{,}04 > 0 \\ g(1{,}28) \approx -0{,}007 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$$

b)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Variation de la fonction g	1	$+$ ↗	2	$+$ ↘	0	$-$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

4)

a) Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$

$$f'(x) = \frac{1 \times (1 + e^x) - xe^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{1 + e^x - xe^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{1 + (1 - x)e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + e^x)^2}$$

Or $(1 + e^x)^2 > 0$ donc $\boxed{f'(x) \text{ est du signe de } g(x)}$

b) On vient de voir que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ et on a vu que :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

Enfin $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$ donc $\alpha > 1$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; 1]$

$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 1]}$

c)

$x \in [0; 1] \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f est croissante sur $]-\infty; 1]$

Or :

$$f(0) = \frac{0}{1+e^0} = 0 \qquad f(1) = \frac{1}{1+e} < 1 \; car \; e > 0$$

On a donc :

$$x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{1+e} < 1$$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{si } x \in [0; 1] \text{ alors } f(x) \in [0; 1]}$

Partie B

1)

a) *Voir annexe*

b)

$\boxed{\text{On peut conjecturer que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$

2)

a) On pose la proposition (P_n) : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

Initialisation : Au rang $n = 0$

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = f(u_0) = \frac{u_0}{1+e^{u_0}} = \frac{1}{1+e^1} = \frac{1}{1+e}$$

Or

$$e > 0 \Rightarrow 1 + e > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e} < \frac{1}{1} = 1$$

On a donc

$$0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$$

Donc la proposition P_0 est vraie

Hérédité : Supposons, qu'à un certain rang n, la proposition P_n soit vraie. C'est-à-dire que

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

Or on sait d'après la question **4) b)** de la **Partie A** que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$

Donc

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

Et en conséquence :

$$0 = f(0) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq f(1) = \frac{1}{1+e} < 1$$

Et donc finalement :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

Donc P_{n+1} est vrai

La proposition P_n est donc héréditaire

Conclusion : La proposition P_n est héréditaire et initialisée au rang $n = 0$

Donc pour tout entier naturel n, on a $\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$

b) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc la suite (u_n) converge vers un réel L

c) Il suffit de résoudre l'équation

$$x = \frac{x}{1+e^x} \Leftrightarrow x - \frac{x}{1+e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{1+e^x}\right) = 0 \Leftrightarrow x\frac{1+e^x-1}{1+e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\frac{e^x}{1+e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ car } \frac{e^x}{1+e^x} \neq 0$$

Ainsi on a L = 0

On a donc bien prouvé que la suite (u_n) converge vers 0

Exercice 4

1)

a)

Pour z_B :

$$z_B = \alpha = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Pour z_C :

$$z_C = \overline{\alpha} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

Pour z_E :

$$z_E = \alpha e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\theta} = \boxed{2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}}$$

b) Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et passant par A

Donc le rayon de ce cercle est :

$$R = OA = |z_A| = |2| = 2$$

Or on a :

$$|z_B| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2 \qquad |z_C| = \left|2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| = 2$$

$$|z_E| = \left|2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}\right| = 2 \qquad |z_D| = \left|2e^{i\theta}\right| = 2$$

Ainsi on a $OB = OC = OD = OE = 2 = R$

Donc les points B, C, D et E appartiennent au cercle Γ

c)

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}\right) = arg\left(\frac{z_E}{z_D}\right) = arg(z_E) - arg(z_D) = arg\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}\right) - arg\left(2e^{i\theta}\right) = \frac{\pi}{3} + \theta - \theta = \frac{\pi}{3}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

2)

a) On va calculer :

$$\begin{aligned}\alpha^2-4\alpha-(2\overline{\alpha}-8) &= \alpha^2-4\alpha-2\overline{\alpha}+8\\ &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-4\left(1+i\sqrt{3}\right)-2\left(1-i\sqrt{3}\right)+8\\ &= 4e^{i\frac{2\pi}{3}}-4-4i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}+8\\ &= 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2-2i\sqrt{3}\\ &= -2+2i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}\\ &= 0\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que :

$$\alpha^2-4\alpha-(2\overline{\alpha}-8)=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8}$$

b) F et G sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$

Donc :

$$\begin{cases} z_F=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}\\[2ex] z_G=\dfrac{z_C+z_E}{2}=\dfrac{\overline{\alpha}+\alpha e^{i\theta}}{2}\end{cases}$$

$$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\dfrac{\overline{\alpha}+\alpha e^{i\theta}}{2}-2}{\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}-2}$$

$$=\frac{\overline{\alpha}+\alpha e^{i\theta}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\overline{\alpha}+2\alpha e^{i\theta}-8}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\overline{\alpha}-8+2\alpha e^{i\theta}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\alpha^2-4\alpha+2\alpha e^{i\theta}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}\text{ car d'après la question précédente }\alpha^2-4\alpha=2\overline{\alpha}-8$$

$$=\frac{\alpha}{2}\times\frac{\alpha-4+2e^{i\theta}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$$

$$=\frac{\alpha}{2}\times\frac{\alpha+2e^{i\theta}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\frac{\alpha}{2}\times 1$$

Ainsi on a bien prouvé que :

$$\boxed{\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}}$$

c) On a donc prouvé à la question précédente que :

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AG}{AF} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AG = AF \\ \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ce qui prouve que le triangle AFG est équilatéral

3)

a) On a :

$$z_F - z_A = \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} - 2$$

$$= \frac{\alpha + 2e^{i\theta} - 4}{2}$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3} + 2\left(cos(\theta) + i\, sin(\theta)\right) - 4}{2}$$

$$= \frac{-3 + i\sqrt{3} + 2cos(\theta) + 2i\, sin(\theta)}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + cos(\theta) + i\, sin(\theta)$$

$$= cos(\theta) - \frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + sin(\theta)\right)$$

On a donc

$$AF^2 = |z_F - z_A|^2 = \left(cos(\theta) - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + sin(\theta)\right)^2$$

$$= cos^2(\theta) - 2 \times \frac{3}{2} cos(\theta) + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, sin(\theta) + sin^2(\theta)$$

$$= cos^2(\theta) + sin^2(\theta) - 3cos(\theta) + \frac{12}{4} + \sqrt{3}\, sin(\theta)$$

$$= 1 - 3cos(\theta) + 3 + \sqrt{3}\, sin(\theta)$$

$$= 4 - 3\, cos(\theta) + \sqrt{3}\, sin(\theta)$$

Ainsi on a bien prouvé que $\boxed{AF^2 = 4 - 3cos(\theta) + \sqrt{3}sin(\theta)}$

b)

$$f'(\theta) = -3[-sin(\theta)] + \sqrt{3}\,cos(\theta)$$

$$= 3sin(\theta) + \sqrt{3}\,cos(\theta)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin(\theta) + \frac{1}{2}\,cos(\theta)\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(sin\left(\frac{\pi}{3}\right)sin(\theta) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\,cos(\theta)\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\,cos(\theta)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sin(\theta)sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\,cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ainsi on a bien prouvé que :

$$\boxed{f'(\theta) = 2\sqrt{3}\,cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}$$

c) On étudie le signe de la dérivée :

$$f'(\theta) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \theta < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

De même on a :

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi on peut dresser le tableau de variation suivant :

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Signe de la dérivée f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de la fonction f	7	$\searrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\searrow$	7

$$f(-\pi) = 4 - 3cos(-\pi) + \sqrt{3}sin(-\pi) = 4 - 3 \times (-1) + \sqrt{3} \times 0 = 7$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 - 3cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 - 3cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3}sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4 + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$f(\pi) = f(-\pi) = 7$ car il est "évident" que la fonction f est 2π périodique

d) Tout d'abord :

$$AF^2 = 4 - 3cos(\theta) + \sqrt{3}sin(\theta) = f(\theta) \Leftrightarrow AF = \sqrt{f(\theta)} \quad car\ AF \geq 0$$

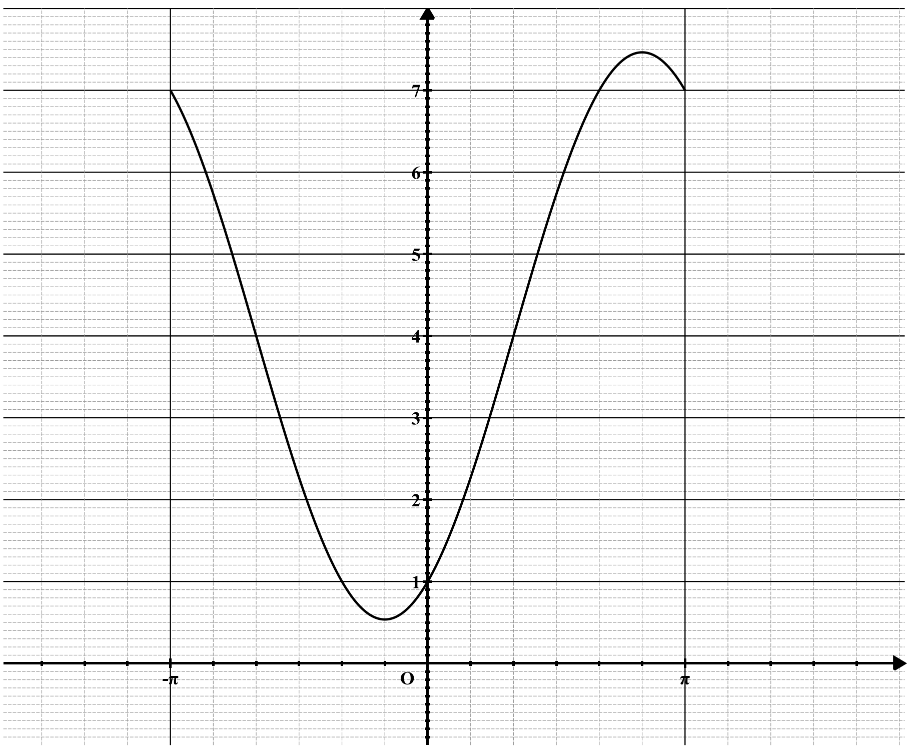
Or on sait que les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations tant que $f \geq 0$

Ces deux fonctions atteindront donc leurs extrema respectifs aux mêmes points

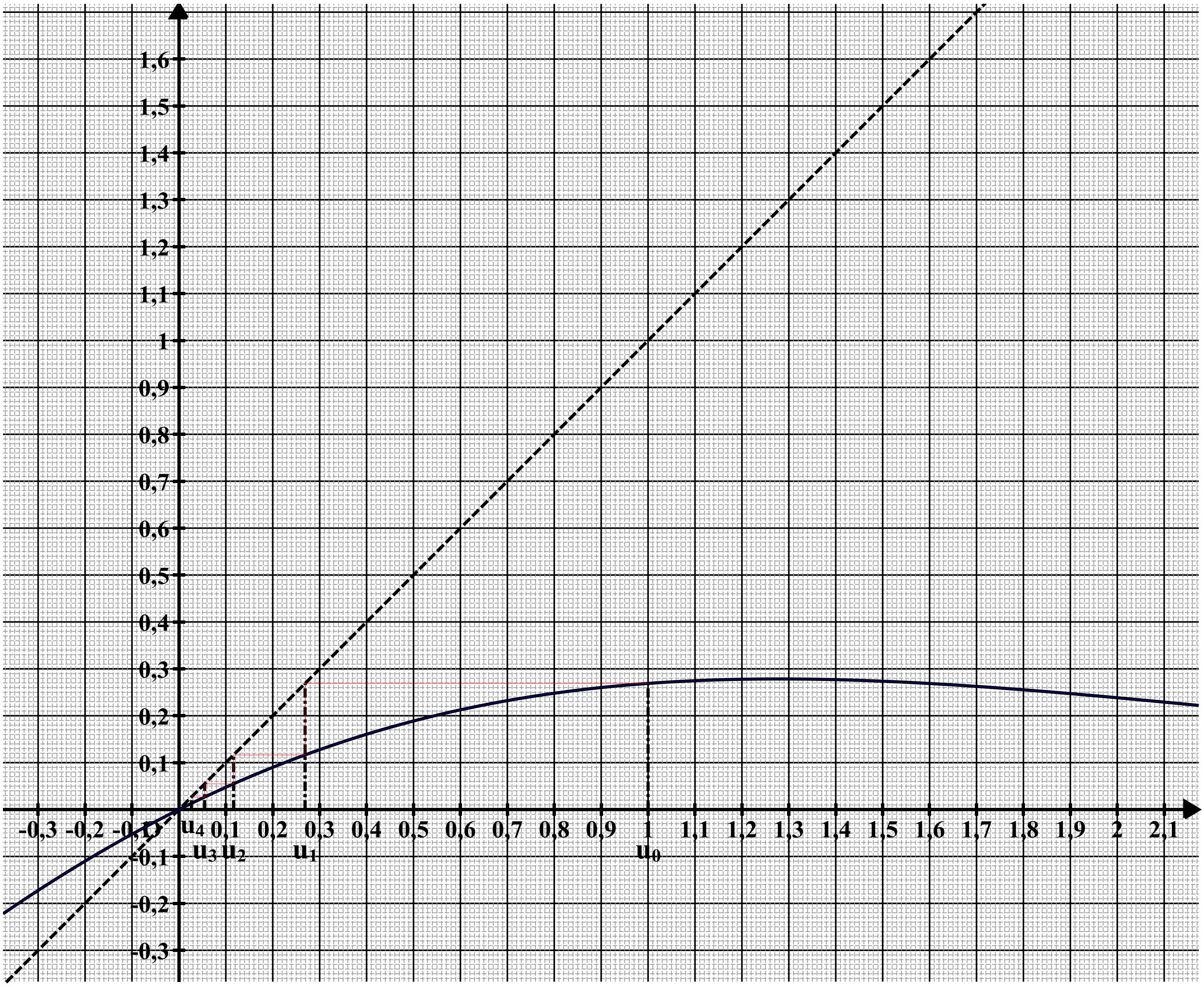
Or, d'après l'étude des variations de f, elle atteint son minimum en $-\frac{\pi}{6}$ à 2π près (car f est 2π périodique)

$$\boxed{\text{Ce qui signifie que la longueur est AF minimale lorsque } z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i}$$

En complément, voici la courbe de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$



ANNEXE



1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2
-0,3
-0,3 -0,2 -0,1 O 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2 2,1
u_4 u_3 u_2 u_1 u_0