BACCALAURÉAT BLANC

**LYCEE DAUDET**

SESSION DE 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

corrigé

# EXERCICE 1

**1.a)** Réponses : **b)** **e)**

**2.** Réponses : $\mathscr{C}_3$

**3.** Réponses : **d)**

**4.** Réponses : **c)** **d)**

**5.** Réponses : **a)** **d)**

## EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

### Partie A - Restitution organisée de connaissances

**Prérequis**

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z=a+b\mathrm{i}$ où $a$ et $b$ sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

**Questions**

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $\overline{z \times z'}=\overline{z} \times \overline{z'}$.

**Voir Cours :** on utilise les écritures algébriques des nombre $z=a+ib$ , $z'=a'+ib'$ puis on compare les écritures algébriques de $\overline{z} \times \overline{z'}$ et de $\overline{z \times z'}$ …..

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout nombre complexe $z$, $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.

**Voir Cours :** on utilise un raisonnement par récurrence .

### Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où $z$ est un nombre complexe.

***1.*** Montrer que si le nombre complexe $z$ est solution de l'équation $(E)$ alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation $(E)$.

Calculons $(-z)\times(-z)\times(-z)\times(-z)=z^4=-4$ , donc $-z$ est aussi solution de l'équation (E).
De même $\overline{z}\times\overline{z}\times\overline{z}\times\overline{z}=(\overline{z}\times\overline{z})\times(\overline{z}\times\overline{z})=\overline{z^2}\times\overline{z^2}$ d'après la **Question A. 2.** et toujours d'après la même formule $\overline{z^2}\times\overline{z^2}=\overline{z^4}=\overline{-4}=-4$ , car $-4\in\mathbb{R}$ .
Donc $\overline{z}$ est aussi solution de (E).

***2.*** On considère le nombre complexe $z_0=1+\mathrm{i}$.

**a)** Écrire le nombre complexe $z_0$ sous forme exponentielle.

$z_0=1+\mathrm{i}$ , donc $|z_0|^2=1^2+1^2=2\Rightarrow|z_0|=\sqrt{2}$ . On peut en factorisant écrire :

$$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} .$$

**b)** Vérifier que $z_0$ est solution de l'équation (E).

On a $z_0^4=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4=(\sqrt{2})^4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4=4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)=4\times(-1)=-4$ .
$z_0$ est bien une solution de l'équation (E).

***3.*** Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation $(E)$.

D'après la **Question B. 1.** $-z_0=-1-\mathrm{i}$ et $\overline{z_0}=1-\mathrm{i}$ sont aussi solutions ; mais puisque $\overline{z_0}$ est solution son opposé $-\overline{z_0}=-1-\mathrm{i}$ l'est aussi. Conclusion :
$1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$ sont solutions de (E).

## Partie C

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ les points d'affixes respectives
$z_A=1+i$ $z_B=-1+i$ $z_C=-1-i$ $z_D=1-i$ $z_E=-1+\sqrt{3}$

**1.** Montrer que les droites $(AC)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires.

Plusieurs méthodes sont possibles.... l'une d'entre elles consiste à utiliser le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D-x_B \\ y_D-y_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ainsi

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-2\times(-2)+(-2)\times 2=0$ ce qui prouve que $(AC)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires.

**2.** Que peut-on dire du triangle $CBE$ ? Justifier votre réponse.

Le triangle semble équilatéral. Vérifions :

$$CB=|z_B-z_C|=|-1+i-(-1-i)|=|-1+i+1+i|=|2i|=|2|\times|i|=2\times 1=2$$

$$CE=|z_E-z_C|=|-1+\sqrt{3}-(-1-i)|=|-1+\sqrt{3}+1+i|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$BE=|z_E-z_B|=|-1+\sqrt{3}-(-1+i)|=|-1+\sqrt{3}+1-i|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$$

$CE=BE=BC=2$ : le triangle est bien équilatéral !

*(d'autres méthodes sont possibles)*

**3.** Soit le point $F$ d'affixe $z_F=2e^{-i\frac{\pi}{3}}-1-i$

**a)** Déterminer la forme algébrique de $z_F$.

$$z_F=2e^{-i\frac{\pi}{3}}-1-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-1-i=2\left(\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)-1-i$$

Donc $z_F=1-i\sqrt{3}-1-i=0+i(-1-\sqrt{3})=-i(1+\sqrt{3})$ : c'est un imaginaire pur.

**b)** Montrer que $\dfrac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ est un nombre réel

Calculons $z_A-z_E=1+i-(-1+\sqrt{3})=2-\sqrt{3}+i$

et $z_A-z_F=1+i-(-i(1+\sqrt{3}))=1+i+i(1+\sqrt{3})=1+i(2+\sqrt{3})$

Calculons le quotient et cherchons la forme algébrique du résultat :

$$\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F}=\frac{2-\sqrt{3}+i}{1+i(2+\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3}+i)(1-i(2+\sqrt{3}))}{(1+i(2+\sqrt{3}))(1-i(2+\sqrt{3}))}$$

*(il reste à développer et réduire)*

$$=\frac{2-\sqrt{3}-i(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})+i+(2+\sqrt{3})}{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{4}{8+4\sqrt{3}}$$

Finalement ce résultat est bien un nombre réel.

**c)** Que peut-on en déduire pour les points $A, E, F$ ?

Nous allons prouver que les points sont alignés *(comme l'indique la figure ci-dessous)* en utilisant le dernier résultat :

**1ère Méthode :** *(permettant de retrouver l'angle de vecteur* $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE})$ )

L'argument de $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est l'angle $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE})$, en effet :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = \arg(z_A - z_E) - \arg(z_A - z_F) = \arg(z_{\overrightarrow{EA}}) - \arg(z_{\overrightarrow{FA}}) = (\vec{u};\overrightarrow{EA}) - (\vec{u};\overrightarrow{FA})$$

$$= (\vec{u};\overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{FA};\vec{u}) = (\overrightarrow{FA};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{FA};\overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE})$$

Or d'après le résultat précédent, $\arg\left(\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = \arg\left(\dfrac{4}{8+2\sqrt{3}}\right) = 0$ puisque tout nombre positif admet un argument nul.

Ainsi, $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}) = 0$ ce qui prouve que les points sont alignés !

**2ème Méthode :**

Nous avons obtenus dans la question précédente : $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \dfrac{4}{8+2\sqrt{3}}$

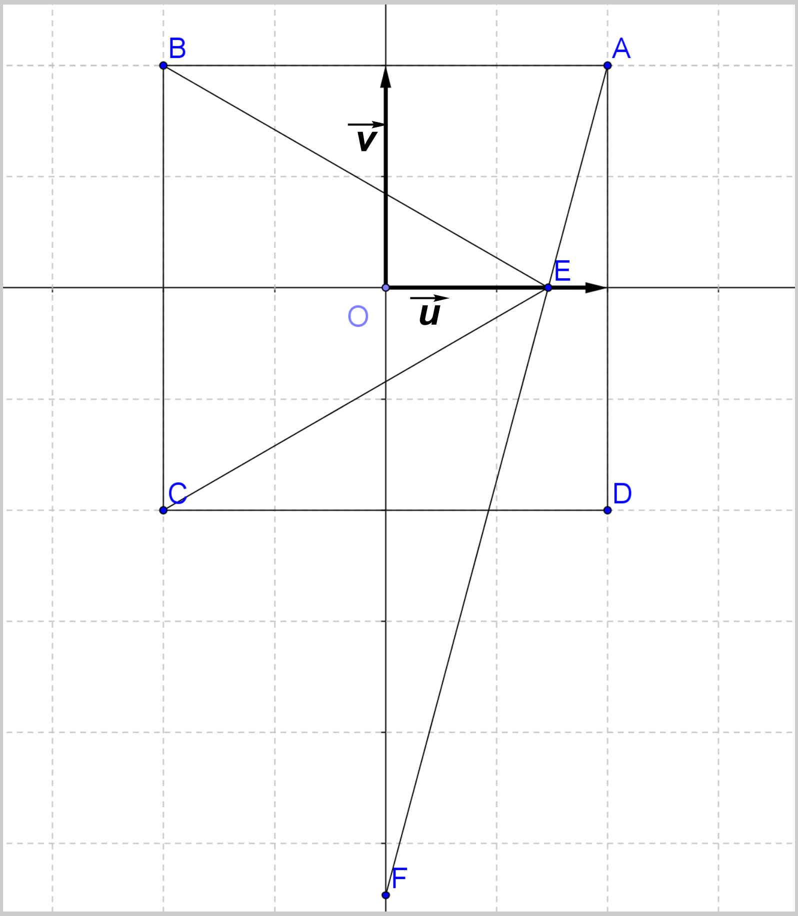
ce qui équivaut à :

$$z_A - z_E = \left(\frac{4}{8+2\sqrt{3}}\right)(z_A - z_F)$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{EA}} = \frac{4}{8+2\sqrt{3}} z_{\overrightarrow{FA}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{4}{8+2\sqrt{3}} \overrightarrow{FA}$$

Ainsi les vecteurs sont colinéaires ce qui prouve que les points sont alignés.



## EXERCICE 3

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=5\ln(x+3)-x.$$

**1.a)** On appelle $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;+\infty[$.

$f$ est une somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x)=5\times\frac{1}{x+3}-1=\frac{5-x-3}{x+3}=\frac{2-x}{x+3}.$$

Or $x\geqslant 0\Rightarrow x+3\geqslant 3>0$. Ainsi $f'$ est du signe de $2-x$ :

- $2-x>0\Leftrightarrow x<2$.
- $2-x<0\Leftrightarrow x>2$.
- $2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

**b)** Donner, dans un tableau, les variations de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Avec ce qui précède :
- La fonction $f$ est croissante sur [0 ; 2[.
- La fonction $f$ est décroissante sur $]2;+\infty[$.
- $f(2)=5\ln(5)-2\approx 4{,}047$ est le maximum de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$.

On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f$ | | | $5\ln(5)-2$ | | |
| | | ↗ | | ↘ | |
| | $5\ln(3)$ | | | | $-\infty$ |

**c)** Montrer que, pour tout $x$ strictement positif on a $f(x)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

Comme $x>0$, on peut factoriser :

$$f(x)=5\ln x\left(1+\frac{3}{x}\right)-x=5\ln x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-x=5\ln x-x+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=x\left(5\frac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

**d)** En déduire la limite de $f$ en $+\infty$ :

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\ln 1=0$, donc finalement :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}5\times(-x)=-\infty.$

**e)** Compléter le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

D'autre part $f(0)=5\ln 3$. Voir le tableau plus haut.

**2.a)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On notera $\alpha$ cette solution.

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, $f$ est continue, strictement décroissante de $f(2)>0$ à $-\infty$. Il existe donc un réel unique $\alpha>2$, tel que $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)-\alpha=0$. *(théorème de la bijection)*

**b)** Après avoir vérifié que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

$f(14)=5\ln 17-14\approx 0{,}17>0$ et $f(15)=5\ln 18-15\approx -0{,}55<0$, donc $14<\alpha<15$.
La calculatrice livre : $f(14{,}2)=5\ln(17{,}2)-14{,}2\approx 0{,}02>0$ et $f(14{,}3)=5\ln(17{,}3)-14{,}3\approx -0{,}05<0$, donc $14{,}2<\alpha<14{,}3$.

**c)** En déduire le signe de $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Le tableau de variations montre donc que :
- $f(x)>0$ sur $[0;\alpha[$ ; - $f(x)<0$ sur $[\alpha;+\infty[$ ; - $f(\alpha)=0$.

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1}=5\ln(u_n+3) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n\neq 0$

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=5\ln(x+3)$

**1.a)** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes $u_0, u_1, u_2$ de la suite $(u_n)$ en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

En **annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite $D$ d'équation $y=x$ et la courbe $C$, courbe représentative de la fonction $g$.

**b)** Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite $(u_n)$

La suite semble être croissante.

**2.a)** Étudier le sens de variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

La fonction $g$ a même sens de variation que la fonction ln, soit croissante ; on peut également calculer $g'(x)=\dfrac{5}{x+3}>0$ comme quotient de deux nombres supérieurs à zéro.

**b)** Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où $\alpha$ est défini dans la partie A question 2. a.

On a vu dans la partie que $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)-\alpha=0 \Leftrightarrow 5\ln(\alpha+3)=\alpha \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$.

**c)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

***Initialisation :*** On a $0\leqslant 4\leqslant\alpha$ : l'encadrement est vrai au rang 0 ;

***Hérédité :*** Supposons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant u_p\leqslant\alpha$
Comme la fonction $g$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc en particulier sur $[0;\alpha]$, on a donc :
$g(0)\leqslant g(u_p)\leqslant g(\alpha)$ c'est-à-dire $5\ln 3\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$ (d'après la question précédente).
On a donc *a fortiori* : $0\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$.
L'encadrement est vrai au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel $n\in\mathbb{N}$ : $0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.

**d)** Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b.** de la partie B.

**1ère méthode :**
On a vu que sur l'intervalle $[0;\alpha[$, $f(x)>0$ sur $[0;\alpha[$, donc pour tout $u_n$ tel que
$0\leqslant u_n\leqslant\alpha$, $\ln(u_n+3)-u_n>0 \Leftrightarrow \ln(u_n+3)>u_n \Leftrightarrow g(u_n)>u_n \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$ ,
ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est croissante.

**2ème méthode :**
On peut faire un raisonnement par récurrence avec :
**Initialisation :** $u_0<u_1$ *(voir résultats question **1a.** )*
**Hérédité :** Supposons que $u_n<u_{n+1}$ pour une certaine valeur de $n\in\mathbb{N}$ .
Avec $g$ qui est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *(voir question **2.a**)* , il vient :
$g(u_n)<g(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1}<u_{n+2}$ : C.Q.F.D.

**e)** En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $(u_n)$ converge .

( *on admettra* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ )

Cette suite est croissante et majorée par $\alpha$ : elle converge donc vers une limite $l$ telle que $l\leqslant\alpha$.

**3.** On considère l'algorithme suivant :

| |
|---|
| $u$ prend la valeur 4<br>Répéter Tant que $u-14,2<0$<br>    $u$ prend la valeur de $5\ln(u+3)$<br>Fin du Tant que<br>Afficher $u$ |

**a)** Justifier que cet algorithme se termine.

Cet algorithme calcule successivement $u_1, u_2, \ldots$. On a vu que cette suite est croissante et converge vers le nombre $\alpha$ supérieur à 14,2 . La condition $u-14,2\geq 0$ sera donc réalisée au bout d'un certain nombre de répétitions de la boucle *"Tant que"* ; ainsi la lecture de l'algorithme se poursuivra après la Fin du *"Tant que"* et l'algorithme affichera alors la première valeur de la suite supérieure à $14,2$ .

**b)** Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

On obtient $u_6\approx 14,22315>14,2$.

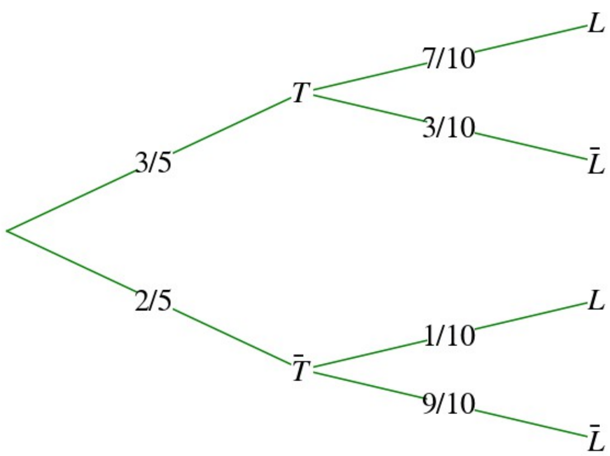
**EXERCICE 3 ( ??? points)**

Au rayon image et son d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$ ;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$ ;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T l'événement : la personne achète le téléviseur et par L l'événement : la personne achète le lecteur de DVD .
On notera $\overline{T}$ et $\overline{L}$ les événements contraires respectifs de $T$ et de $L$.

1. **a)** Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.




**b)** Démontrer que la probabilité que la personne n'achète aucun appareil est égal à $\frac{9}{25}$

$$P(\overline{T}\cap\overline{L})=P(\overline{T})\times P_{\overline{T}}(\overline{L})=\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{25}$$

**c)** Calculer la probabilité que la personne achète un lecteur DVD

$$P(L)=P(T\cap L)+P(\overline{T}\cap L)=\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{23}{50}$$

**d)** On sait que la personne achète le lecteur de DVD. Calculer la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur.

$$P_L(T)=\frac{P(L\cap T)}{P(L)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}}{\frac{23}{50}}=\frac{21}{23}$$

**2.** 5 clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui n'achète aucun appareil.

**a)** Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

On répète 5 fois une expérience aléatoire identique qui ne comporte que deux issues. Le succès étant que la personne n'achète aucun appareil est sa probabilité est de $\frac{9}{25}$. Les résultats des expériences sont supposées indépendantes. $X$ Suit donc un loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{9}{25}$

**b)** Quelle est la probabilité pour qu'exactement un client n'ait pas acheté d'appareil ? (Arrondir au centième)

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{9}{25}\right)^1\times\left(\frac{16}{25}\right)^4\approx 0,3$$

**3.** Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 € (Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils. On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.

**a)** Déterminer les valeurs possibles de D

Si la personne achète deux appareils : $D=0,75\times 700=525$
Si la personne achète le téléviseur uniquement : $D=0,85\times 500=425$
Si la personne achète le lecteur DVD uniquement : $D=0,85\times 200=170$
Si la personne n'achète rien : $D=0$

**b)** Déterminer la loi de probabilité de D.

| $d_i$ | 0 | 170 | 425 | 525 |
|---|---|---|---|---|
| $P(D=d_i)$ | $\frac{18}{50}$ | $\frac{2}{50}$ | $\frac{9}{50}$ | $\frac{21}{50}$ |

**c)** Calculer l'espérance mathématique de D.

$$E(X)=0\times\frac{18}{50}+170\times\frac{2}{50}+425\times\frac{9}{50}+525\times\frac{21}{50}=244,3$$