BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

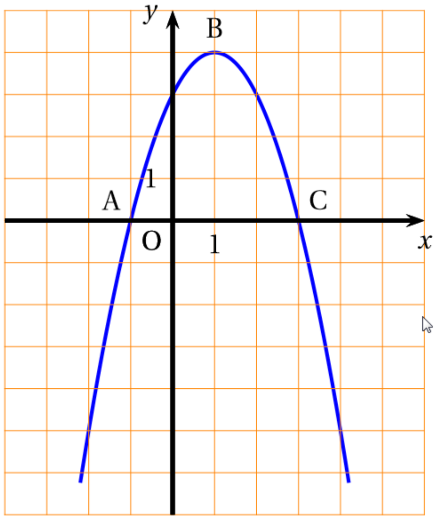
Ce sujet comporte **6** pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

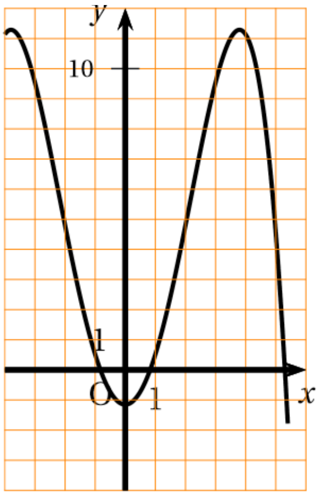
Pour chacune des questions suivantes, une ou plusieurs réponses sont exactes. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la ou les réponses choisies.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question , il sera attribué 1 point si toutes les bonnes réponses sont citées, une réponse fausse enlève des points, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.



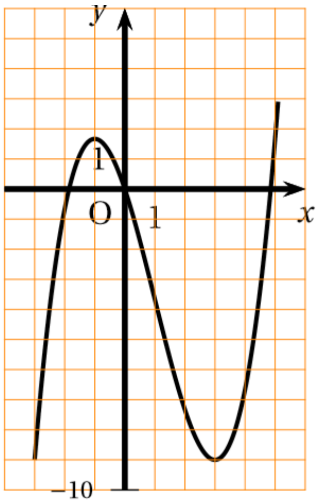
Pour les questions 1,2 et 3. on utilise la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;6]$ dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.
Les points $A(-1;0)$ $B(1;4)$, et $C(3;0)$ appartiennent à la représentation graphique de f. La tangente à la courbe en B est horizontale

1. **a)** $f'(0)=1$ **b)** $f'(1)=0$
c) $f'(-1)=0$ **d)** f n'est pas dérivable en 1 **e)** $f(1)=4$

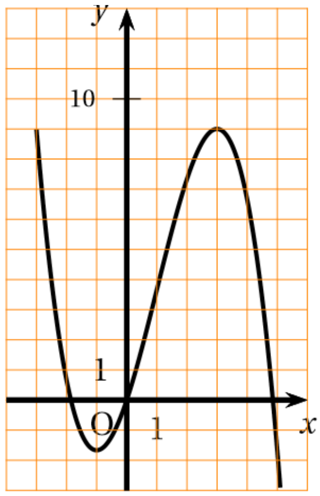
2. Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

3. Soit $I=\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

a) $I<0$ **b)** $I>1$ **c)** $I>3$
d) $1<I<2$ **e)** I ne représente pas une aire

4. Une primitive de la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+2)e^{-x}$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $G(x)=(-x-1)e^{-x}$ **b)** $G(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)e^{-x}$

c) $G(x)=(-x-3)e^{-x}$ **d)** $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

5. Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ **b)** $H(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2)$ est une primitive de h

c) $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2^2$ **d)** $\varphi(t)=\displaystyle\int_1^t h(x)\,\mathrm{d}x$ est une fonction croissante

EXERCICE 2 (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1;46]$.

1. On considère l'équation (E) : $23x+47y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière $(x_{0,}y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x\equiv 1[47]$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab\equiv 0[47]$ alors $a\equiv 0[47]$ ou $b\equiv 0[47]$.

b) En déduire que si $a^2\equiv 1[47]$ alors $a\equiv 1[47]$ ou $a\equiv -1[47]$.

3. **a)** On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Demander un entier naturel p compris entre 1 et 46
Traitement	Pour q allant de 1 à 46 faire : x prend la valeur $pq-1$ Si $\dfrac{x}{47}-\mathrm{E}\left(\dfrac{x}{47}\right)=0$ Afficher q Fin du si Fin Pour

Que fait cet algorithme ? Expliquer précisément.

b) Justifier que tout entier p de A est premier avec 47 . On suppose que $p\in\mathrm{A}$
En utilisant un des théorèmes au programme, en déduire qu'il existe un entier relatif q tel que $pq\equiv 1[47]$.

c) Que peut-on en déduire quant à la sortie de l'algorithme précédent ?

4. Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p\times inv(p)\equiv 1[47]$.
Par exemple : $inv(1)=1$ car $1\times 1\equiv 1[47]$, $inv(2)=24$ car $2\times 24\equiv 1[47]$, $inv(3)=16$ car $3\times 16\equiv 1[47]$

a) Qu'affiche l'algorithme précédent si on entre $p=2$? Justifier.

b) Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p=inv(p)$?

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=5\ln(x+3)-x$

1. **a)** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;+\infty[$

b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x)=x\left(5\dfrac{\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

d) En déduire la limite de f en $+\infty$

e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

2. **a)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$. On notera α cette solution.

b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n+3) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n \neq 0$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=5\ln(x+3)$

En **annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite D d'équation $y=x$ et la courbe C , courbe représentative de la fonction g .

1. **a)** Construire sur l'axe des abscisses de l'**annexe 1** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. **a)** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

e) En déduire que la suite (u_n) converge (on admettra alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$)

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a) Justifier que cet algorithme se termine.

b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

EXERCICE 4 (4 points)

Au rayon image et son d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10.}$

On désigne par T l'événement : la personne achète le téléviseur et par L l'événement : la personne achète le lecteur de DVD .
On notera $\overline{T}$ et $\overline{L}$ les événements contraires respectifs de T et de L.

1. **a)** Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
   b) Démontrer que la probabilité que la personne n'achète aucun appareil est égal à $\frac{9}{25}$
   c) Calculer la probabilité que la personne achète un lecteur DVD
   d) On sait que la personne achète le lecteur de DVD. Calculer la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur.

2. 5 clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui n'achète aucun appareil.
   a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
   b) Quelle est la probabilité pour qu'exactement un client n'ait pas acheté d'appareil ? (Arrondir au centième)

3. Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 € (Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils. On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.
   a) Déterminer les valeurs possibles de D
   b) Déterminer la loi de probabilité de D.
   c) Calculer l'espérance mathématique de D.

NOM : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE 1