BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Obligatoire

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **7** pages numérotées de 1 à 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée portant votre nom

EXERCICE 1 (6 points)

Une agence de voyages propose exclusivement deux destinations : Espagne ou Brésil
70% des clients choisissent l'Espagne et 30% des clients choisissent le Brésil.
Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.
Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 80% des clients ayant choisi la destination Brésil sont satisfaits.
On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les événements :

- E : le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination Espagne
- B : le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination Brésil
- S : le questionnaire est celui d'un client satisfait de son voyage

PARTIE A

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité (il sera incomplet pour l'instant)
2. **a)** Traduire par une phrase l'événement $B \cap S$ puis calculer sa probabilité.
   b) L'enquête montre que 72% des clients de l'agence sont satisfaits. Calculer $P(E \cap S)$.
   c) En déduire la probabilité conditionnelle $P_E(S)$.(on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible)
3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait.
   Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination Brésil (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

PARTIE B

On prélève successivement au hasard n questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

1. Dans cette question uniquement, on prendra $n=4$ (on donnera le résultat arrondi au millième).

a) Calculer la probabilité p_1 de l'événement : les quatre questionnaires sont ceux de clients insatisfaits

b) Calculer la probabilité p_2 de l'événement : au moins deux clients sont satisfaits.

2. On revient au cas général où n est quelconque. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel non nul
	$p \in [0;1]$
Entrée :	Demander la valeur p
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
Traitement :	Tant que $1 - 0{,}28^n < p$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin du tant que
Sortie :	Afficher n

a) Qu'affichera cet algorithme si on entre la valeur $p=0{,}999$?

b) Que signifie ce résultat dans le cadre du sondage ?

EXERCICE 2 (3 points)

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Les points $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ et $B(1;0)$ appartiennent à la courbe C_1

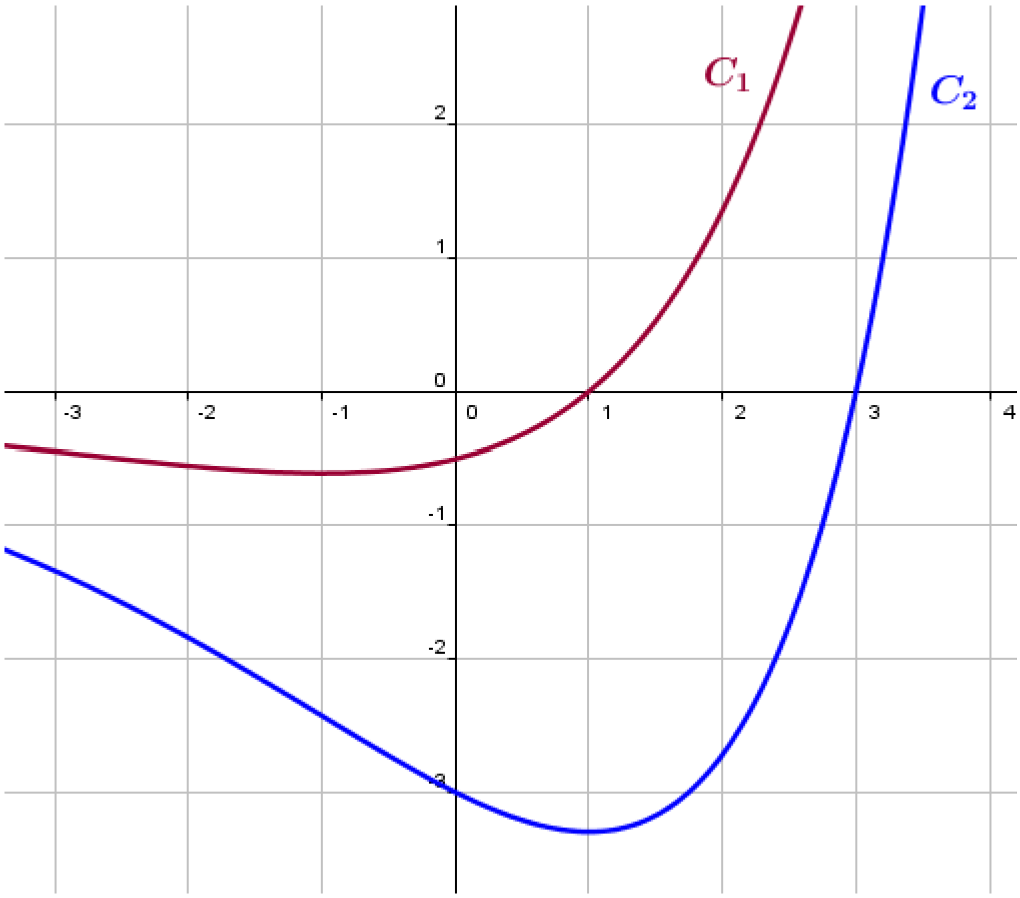
Les points $C(0;-3)$ et $D(3;0)$ appartiennent à la courbe C_2

On sait que l'une des fonctions est la dérivée de l'autre.

On note ces fonctions g et g'.

On sait que g est définie par $g(x)=(ax+b)e^{kx}$ où a, b et k sont trois réels.

Déterminer a, b et k.



EXERCICE 3 (5 points)

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1-x)e^x+1$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2) Étudier les variations de la fonction g puis en dresser le tableau de variation.

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α. Donner un encadrement à 10^{-2} près de α.

b) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

4) On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$

a) Calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$

c) Montrer que si $x\in[0\,;1]$ alors $f(x)\in[0\,;1]$

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+e^{u_n}} \end{cases}$

Ainsi on a $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la question 4) de la Partie A

1) On donne en annexe la courbe de la fonction f.

a) Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 de cette suite. *On doit laisser apparents les traits de construction.*

b) Quelles conjectures peut-on émettre concernant la limite de la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer par récurrence que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

b) En déduire que (u_n) converge vers une limite finie notée L

c) On admet que L est solution de l'équation : $x=\dfrac{x}{1+e^x}$. Prouver votre conjecture concernant la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre O et passant par A.

Soit $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le conjugué de α, on note B et C les points d'affixes respectives $z_B = \alpha$ et $z_C = \overline{\alpha}$.

Soit $\theta \in]-\pi ; \pi]$, on note D le point d'affixe $z_D = 2e^{i\theta}$ et E le point d'affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$

1. **a)** Donner l'écriture exponentielle de z_{B}, z_{C} et z_{E}

   b) Démontrez que les points B, C, D et E appartiennent au cercle Γ

   c) Montrez que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \dfrac{\pi}{3}$

2. On note F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$

   a) Montrez que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$

   b) Déduisez en que : $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$

   c) Déduisez en la nature du triangle AFG. Justifier.

3. On souhaite prouver qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur AF est minimale

   a) Montrez que : $AF^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$

   b) On considère la fonction f définie sur $]-\pi ; \pi]$ par

   $$f(\theta) = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$$

   Montrez que $f'(\theta) = 2\sqrt{3}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

   c) En déduire le signe de f' puis tracer le tableau de variation de f sur $]-\pi ; \pi]$

   d) Conclure

NOM : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE (à rendre avec la copie de l'exercice 3)