BACCALAURÉAT BLANC

LYCEE DAUDET

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **7** pages numérotées de 1 à 7.

Il y a deux annexes qui sont à rendre avec votre copie.

Avant de démarrer, vérifiez que vous avez bien les sept pages du sujet.

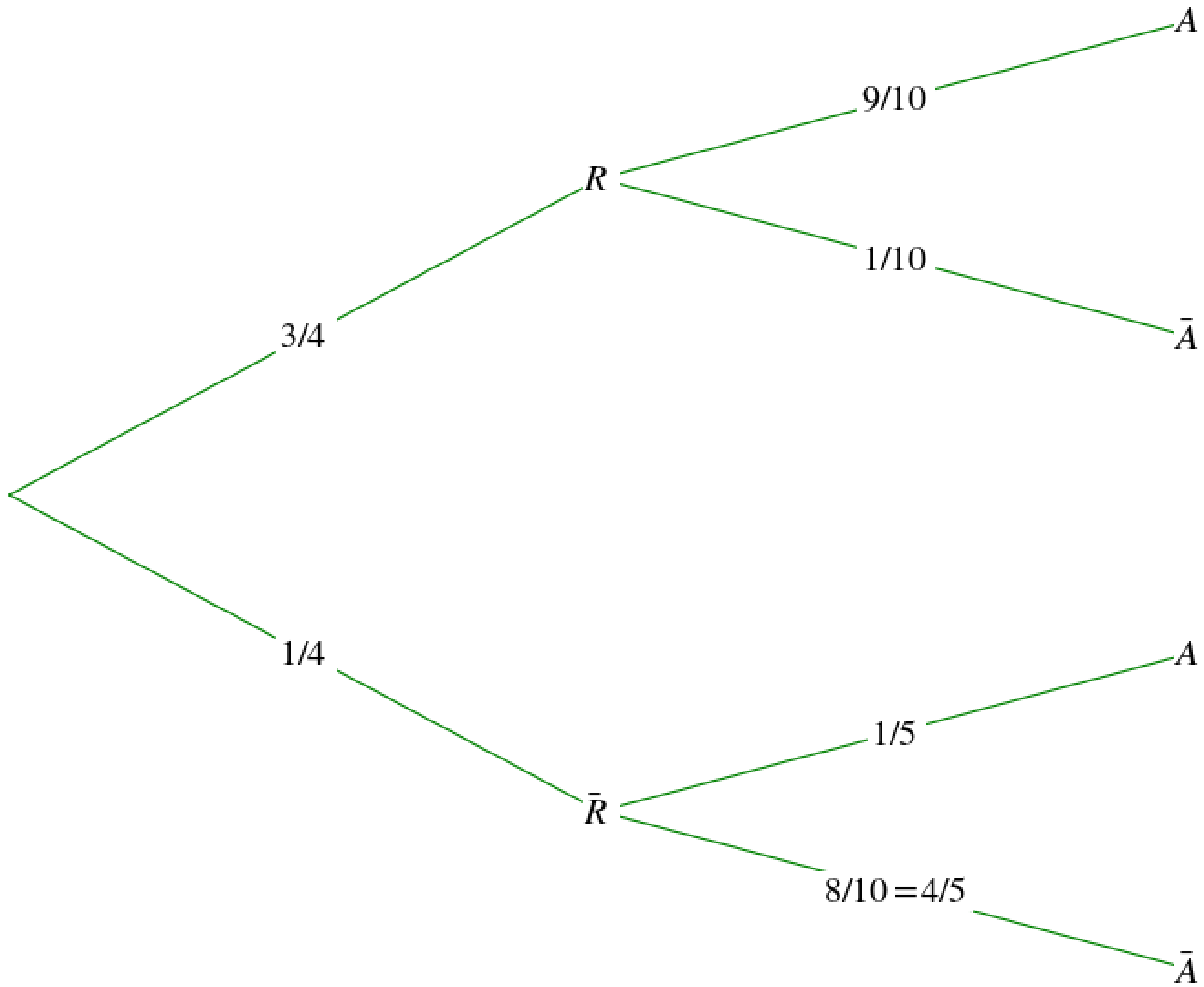
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1) Faire un arbre de probabilité correspondant à cette situation



2) Calculer les probabilités que ce candidat :

a) soit admis et n'ait pas révisé

$$p(A \cap \overline{R}) = p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

b) soit admis

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(R) \times p_R(A) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(A) = \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{27}{40} + \frac{1}{20} = \boxed{\frac{29}{40}}$$

c) ait révisé sachant qu'il est refusé

$$p_{\overline{A}}(R) = \frac{p(R \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{p(R) \times p_R(\overline{A})}{1 - p(A)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{10}}{1 - \frac{29}{40}} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{11}{40}} = \boxed{\frac{3}{11}}$$

3) Calculer la probabilité que le candidat soit un menteur.

On note M l'événement : « Le candidat est un menteur »

$$M = (R \cap A) \cup \left(\overline{R} \cap \overline{A}\right)$$

Les événements $(R \cap A)$ et $\left(\overline{R} \cap \overline{A}\right)$ sont incompatibles.

Donc :

$$p(M) = p(R \cap A) + p\left(\overline{R} \cap \overline{A}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{27}{40} + \frac{1}{5} = \frac{35}{40} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

4) Les événements « Le candidat est admis » et « Le candidat est un menteur » sont ils indépendants ? Justifier.

On a : $M \cap A = R \cap A$

Donc

$$p(M \cap A) = p(R \cap A) = \frac{27}{40} = 0{,}675$$

Or

$$p(M) \times p(A) = \frac{7}{8} \times \frac{29}{40} = \frac{203}{320} = 0{,}634375$$

$$p(M \cap A) \neq p(M) \times p(A)$$

Donc les événements « Le candidat est admis » et « Le candidat est un menteur » ne sont pas indépendants

Partie B

L'année suivante, pour le même examen, on estime que 90 % des candidats sont des menteurs.

1) A la cafétéria, 10 candidats sont assis à une table.

On considère l'expérience de Bernoulli dont l'événement succès est le candidat est un menteur.

Le paramètre de cette expérience de Bernoulli est $p = 0{,}9$

Le nombre de candidats à un examen est suffisamment important pour assimiler le choix des 10 candidats assis à la table comme un tirage successif avec remise.

On peut donc considérer que l'on répète l'expérience de Bernoulli 10 fois de façon indépendante.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de menteurs à cette table.

X suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(10; 0{,}9)$

a) Calculer la probabilité à 0,001 près qu'exactement 7 candidats assis à cette table soient des menteurs.

$$p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0{,}9^7 \times 0{,}1^3 \approx \boxed{0{,}057} \text{ à 0,001 près}$$

b) Calculer la probabilité à 0,001 près qu'au plus 8 candidats assis à cette table soient des menteurs.

$$p(X \leq 8) = 1 - p(X = 9) - p(X = 10) = 1 - 10 \times 0{,}9^9 \times 0{,}1 - 0{,}9^{10} \approx \boxed{0{,}264} \text{ à 0,001 près}$$

c) Combien de menteurs peut-on espérer avoir à cette table ?

$$E(X) = np = 10 \times 0{,}9 = 9$$

On peut espérer qu'il y ait 9 menteurs à cette table.

2) On réunit n candidats dans une salle.

Combien de candidats faut-il réunir au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un candidat qui ne soit pas un menteur soit d'au moins 0,99 ?

On note Y la variable aléatoire comptant le nombre de candidat qui ne soit pas un menteur

On peut considérer que Y suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(n; 0,1)$

On veut avoir :

$$p(Y \geq 1) \geq 0,99$$
$$\Leftrightarrow 1 - p(Y = 0) \geq 0,99$$
$$\Leftrightarrow 1 - 0,9^n \geq 0,99$$
$$\Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,01$$
$$\Leftrightarrow ln(0,9^n) \leq ln(0,01)$$
$$\Leftrightarrow nln(0,9) \leq ln(0,01)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0,01)}{ln(0,9)}$$

Car $ln(0,9) < 0$

Or :

$$\frac{ln(0,01)}{ln(0,1)} \approx 43,71$$

Il faut donc réunir au minimum 44 candidats pour que la probabilité d'avoir au moins un candidat qui ne soit pas un menteur soit d'au moins 0,99

EXERCICE 2 (5 points)

1) Calculer u_1 et u_2. On en donnera les valeurs exactes sous forme de fractions irréductibles.

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{\frac{3}{2}}{1+1} = \boxed{\frac{3}{4}} \\ u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{9}{10}} \end{cases}$$

2)

a) **Construire** avec précision, dans le repère donné en **Annexe 1**, les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses

Voir l'annexe 1

b) Quelles conjectures peut-on faire concernant la suite (u_n) ?

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et convergente vers 1

3)

a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{3(1+2x)-3x\times 2}{(1+2x)^2}=\frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2}=\frac{3}{(1+2x)^2}$$

Sur $[0;+\infty[$ on a $(1+2x)^2>0 \Rightarrow f'(x)>0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) En déduire que $0<f(x)<1$ pour tout réel $x\in\,]0;1[$.

On vient de prouver que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

On a donc :

$$0<x<1 \Rightarrow f(0)<f(x)<f(1)$$

Or :

$$f(0)=\frac{3\times 0}{1+2\times 0}=0$$

Et :

$$f(1)=\frac{3\times 1}{1+2\times 1}=\frac{3}{3}=1$$

On a donc $0<f(x)<1$ pour tout réel $x\in\,]0;1[$

4) Montrer que $0<u_n<u_{n+1}<1$ pour tout entier naturel n.

On va raisonner par récurrence.

Initialisation : Au rang $n=0$, on a :

$$0<u_0=\frac{1}{2}<u_1=\frac{3}{4}<1$$

Donc la proposition est initialisée au rang 0

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie à un certain rang n

C'est-à-dire que $0<u_n<u_{n+1}<1$

Or la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Donc $f(0)<f(u_n)<f(u_{n+1})<f(1)$

Et donc $0<u_{n+1}<u_{n+2}<1$

La proposition est héréditaire et initialisée au rang 0

Donc $0<u_n<u_{n+1}<1$ pour tout entier naturel n.

5) Montrer que la suite (u_n) est convergente

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1

La suite (u_n) est donc convergente

6) On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$$

a) Justifier que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$

On a prouvé à la question **4)** que $u_n < 1$ pour tout entier naturel n.

Donc $1 - u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n.

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc définie sur } \mathbb{N}}$

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3\frac{u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison 3}}$

c) En déduire v_n en fonction de n

On a donc :

$$v_n = v_0 \times 3^n = \frac{u_0}{1-u_0} \times 3^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \times 3^n = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \times 3^n$$

$$\boxed{v_n = 3^n}$$

d) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow 3^n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow 3^n(1-u_n) = u_n \quad car\ 1 - u_n \neq 0 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

$$\Leftrightarrow 3^n - 3^n u_n = u_n \Leftrightarrow 3^n = u_n + 3^n u_n \Leftrightarrow u_n(1+3^n) = 3^n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{3^n}{1+3^n}} car\ 1 + 3^n \neq 0 \text{ pour tout entier naturel } n$$

e) En déduire la limite de la suite (u_n)

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{3^{-n}+1}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 3^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

EXERCICE 3 (5 points)

A chaque exercice prendre une nouvelle copie en mentionnant nom et classe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 1$ et $z_B = i$

A tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$

Partie A

Dans cette partie uniquement, on considère que :

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

1)

a) Déterminer la forme algébrique de z_M

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 - i\sqrt{3}}$$

b) Déterminer la forme exponentielle et la forme algébrique de $z_{M'}$

Une forme exponentielle de $z_{M'}$:

$$z_{M'} = -iz_M = -i \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$

La forme algébrique de $z_{M'}$:

$$z_{M'} = -iz_M = -i \times \left(1 - i\sqrt{3}\right) = -i - \sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3} - i}$$

c) Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_I du point I

$$\text{I le milieu du segment } [AM] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{1 + 1 - i\sqrt{3}}{2} = \boxed{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2)

a) Compléter le dessin donné en **Annexe 2**, en plaçant les points A, B, M, M' et I. On pourra utiliser les cercles pour s'aider dans la construction de ces points.

Voir l'annexe 2

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les droites (OI) et (BM') ?

On peut conjecturer que les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

3)

a) Montrer qu'il existe un réel k non nul, dont on précisera la valeur, tel que :

$$\frac{z_{M'} - z_B}{z_I} = ki$$

$$\frac{z_{M'} - z_B}{z_I} = \frac{-\sqrt{3} - i - i}{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3} - 2i}{\frac{2 - i\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{-\sqrt{3} - 2i}{2 - i\sqrt{3}} = 2 \times \frac{-\sqrt{3} - 2i}{i\left(-2i - \sqrt{3}\right)} = \frac{2}{i} = \boxed{-2i}$$

b) Prouver la conjecture émise à la question **2) b)**.

On a alors :

$$arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_I}\right) = arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Or on sait que :

$$arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_I}\right) = \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{BM'}\right)$$

On a donc :

$$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{BM'}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

Partie B

On revient au cas général avec $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$

1) Exprimer l'affixe du point I en fonction de x et y

$$\text{I le milieu du segment } [AM] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{1 + x + iy}{2} = \boxed{\frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}}$$

2) Exprimer l'affixe du point M' en fonction de x et y

La forme algébrique de $z_{M'}$:

$$z_{M'} = -iz_M = -i \times (x + iy) = -ix + y = \boxed{y - ix}$$

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a) Montrer que (OI) est une hauteur du triangle OBM'

Tout d'abord on peut observer que :

$$y \neq 0 \Rightarrow z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2} \neq 0$$

On peut donc calculer :

$$\frac{z_{M'} - z_B}{z_I} = \frac{y - ix - i}{\frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}} = \frac{y - i(x+1)}{\frac{1 + x + iy}{2}} = 2 \times \frac{y - i(x+1)}{1 + x + iy} = 2 \times \frac{y - i(x+1)}{i(-i(x+1) + y)} = \frac{2}{i} = -2i$$

On a donc comme dans la question **3) b)** de la **Partie A** :

$$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{BM'}\right) = arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_I}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

Donc (OI) est la hauteur du triangle OBM' issue de O

b) Montrer que $BM' = 2\,OI$

D'autre part :

$$\left|\frac{z_{M'} - z_B}{z_I}\right| = |-2i| = 2 \Rightarrow \frac{BM'}{OI} = 2 \Rightarrow \boxed{BM' = 2\,OI}$$

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

1) Quelle est la quantité de principe actif présent dans le sang de l'animal à l'instant :

a) A l'instant $t = 0\ h$

$$f(0) = \frac{1}{2} \times 0e^{-\frac{1}{2}\times 0} = \boxed{0\ mg}$$

b) A l'instant $t = 1\ h$

$$f(1) = \boxed{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}30\ mg \text{ à } 0{,}01\ mg\ près}$$

c) A l'instant $t = 1\ h\ 15\ min$

On convertit :

$$1\ h\ 15\ min = 1h + \frac{1}{4}h = \frac{5}{4}h$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{5}{8}e^{-\frac{5}{8}} \approx 0{,}33\ mg \text{ à } 0{,}01\ mg\ près}$$

On en donnera les valeurs exactes puis une valeur approchée à 0,01 mg près

2)

a) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. En donner une interprétation liée à la prise du médicament.

On pose :

$$T = -\frac{1}{2}t$$

On a d'une part :

$$\lim_{t\to+\infty} T = -\infty$$

Et d'autre part :

$$\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} = -Te^{T}$$

Or on sait, d'après les croissances comparées, que :

$$\lim_{T\to-\infty} Te^{T} = 0$$

Donc :

$$\lim_{T\to-\infty} -Te^{T} = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} = 0}$$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$

On calcule la dérivée de f :

$$f'(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}t\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{4}te^{-\frac{1}{2}t} = \frac{2-t}{4}e^{-\frac{1}{2}t}$$

On étudie le signe de f'

L'exponentielle est strictement positive, donc $e^{-\frac{1}{2}t} > 0$

De plus $4 > 0$

Donc $f'(t)$ est du même signe que $2 - t$

Donc f' est strictement positive sur $[0;2[$ puis strictement négative sur $]2;+\infty[$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0;2]$ puis strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3) Déterminer à quel instant t la quantité de principe actif présente dans le sang de l'animal est maximale, puis calculer cette quantité maximale. On en donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 0,01 *mg* près.

D'après l'étude des variations de f, la quantité de principe actif présente dans le sang de l'animal est maximale à l'instant $t = 2h$ et cette quantité maximale est :

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 2e^{-\frac{1}{2}\times 2} = \boxed{e^{-1} \approx 0{,}37\ mg \text{ à } 0{,}01\ mg\ près}$$

4)

a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f en $t = 0$

L'équation réduite de la tangente T à la courbe de la fonction f en $t = 0$ est :

$$y = f'(0) \times (t - 0) + f(0)$$

Or :

$$f'(0) = \frac{2-0}{4} e^{-\frac{1}{2}\times 0} = \frac{1}{2} \quad et\ f(0) = 0$$

L'équation réduite de la tangente T à la courbe de la fonction f en $t = 0$ est :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}t}$$

b) Montrer que la courbe de f est en dessous de T sur $[0;+\infty[$

Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à T on étudie le signe de $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t$

$$f(t) - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}t = \frac{e^{-\frac{1}{2}t} - 1}{2}t$$

Or sur $[0;+\infty[$, on a $t \geq 0$ et $2 \geq 0$

Donc $g(t)$ est du même signe que $e^{-\frac{1}{2}t} - 1$

$$e^{-\frac{1}{2}t} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}t} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0$$

Cela signifie que sur $[0;+\infty[$, on a :

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t \leq 0$$

Ce qui prouve que la courbe de f est en dessous de T sur $[0;+\infty[$

Partie B

1) Qu'affichera cet algorithme si on entre $E = 0{,}2$? Détailler les étapes de l'algorithme.

Entrée : $E = 0{,}2$

Initialisation : $N = 3$

Traitement :

Test : $f(3) \approx 0{,}33 > 0{,}2$

$N = 4$

Test : $f(4) \approx 0{,}27 > 0{,}2$

$N = 5$

Test : $f(5) \approx 0{,}205 > 0{,}2$

$N = 6$

Test : $f(6) \approx 0{,}15 \leq 0{,}2$

Sortie : L'algorithme affiche la valeur $\boxed{N = 6}$

2) Pourquoi est on certain que l'on aura une valeur N en sortie quelle que soit la valeur de $E > 0$ choisie ?

On sait d'après la question **2) a)** de la **Partie A** que la fonction f tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Cela signifie, par définition, que l'on peut rendre f aussi petit que l'on veut pourvu que t soit suffisamment grand.

Dans l'algorithme, cela signifie que quelque soit la valeur de $E > 0$ choisie il existe un rang N_0 tel que :

$$f(N) \leq E \text{ pour tout } N \geq N_0$$

Dès que l'algorithme atteindra cette valeur N_0, il s'arrêtera.

3) On estime que le principe actif est à l'état de trace lorsqu'il reste moins de 1 % de principe actif présent dans le sang de l'animal par rapport à la dose initiale de 1 *mg*.

a) Quelle valeur de E va-t-on entrer dans l'algorithme ?

On entrera la valeur $\boxed{E = 0{,}01}$

b) On obtient alors en valeur de sortie $N = 13$. Donner une interprétation concrète de ce résultat par rapport à la situation décrite dans la **<u>Partie A</u>**

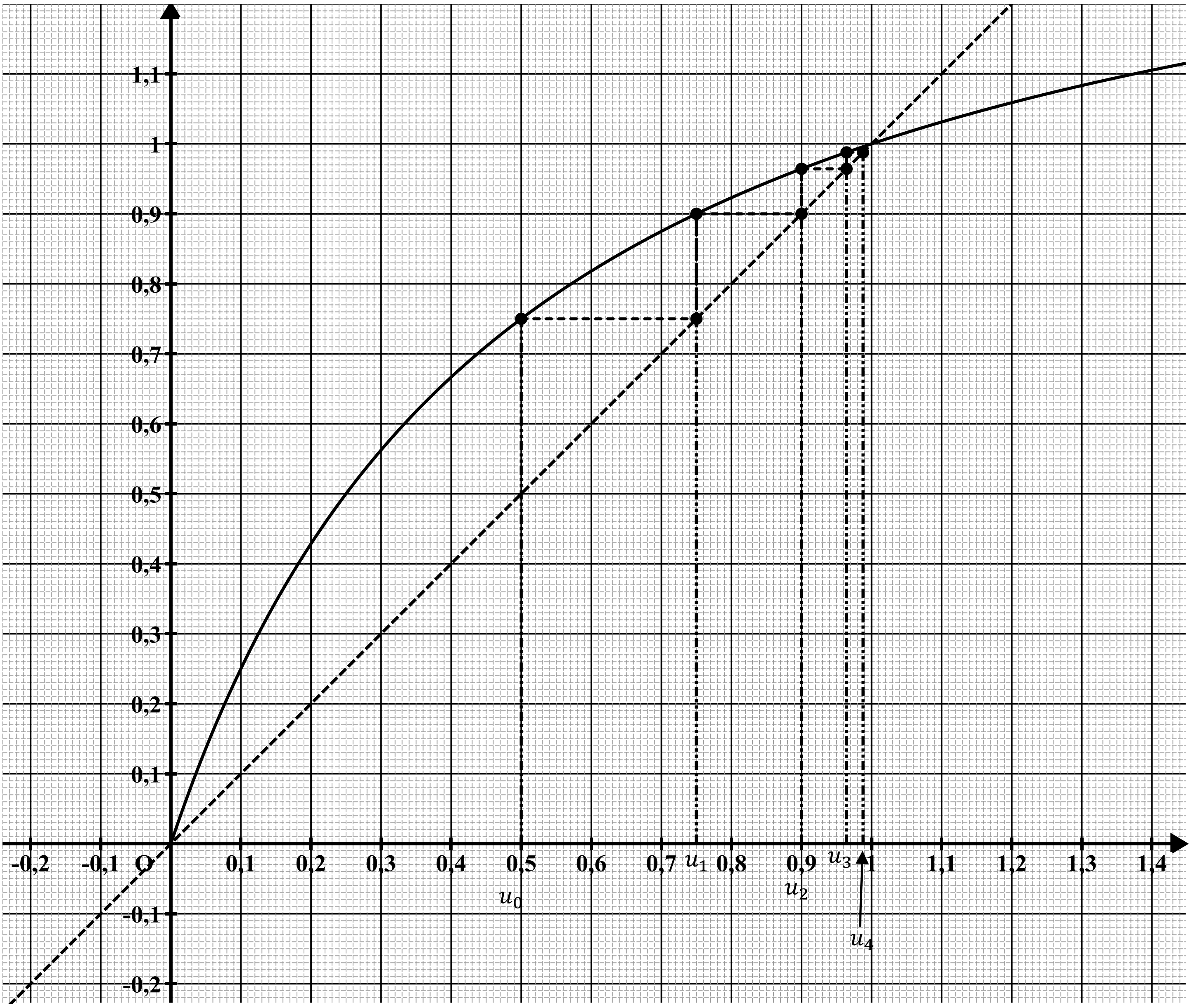
Cela signifie qu'il faut au moins 13 heures pour que le principe actif soit à l'état de trace dans le sang de cet animal

Nom : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE 1 (Exercice 2)

Cette annexe est à rendre avec l'exercice 2 (même si elle n'a pas été complétée)

N'oubliez pas de renseigner vos Nom, Prénom et classe ci dessus



Nom : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE 2 (Exercice 3)

Cette annexe est à rendre avec l'exercice 3 (même si elle n'a pas été complétée)

N'oubliez pas de renseigner vos Nom, Prénom et classe ci dessus