Correction bac blanc : Exercice 2

1)

a) Trouver un couple d'entier $(x; y)$ solution de l'équation $(E): 8x - 5y = 3$

On observe que $(1; 1)$ est une solution évidente de l'équation $(E): 8x - 5y = 3$

b) En déduire l'ensemble des couples d'entier relatif $(x; y)$ solutions de l'équation $(E): 8x - 5y = 3$

$$\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8 \times 1 - 5 \times 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1) - 5(y-1) = 0$$

On a donc :

$$8(x-1) = 5(y-1)$$

8 divise le produit $5(y-1)$ et 8 et 5 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, 8 divise $y - 1$

On a donc : $y - 1 = 8k \Leftrightarrow y = 1 + 8k$ où $k \in \mathbb{Z}$

On peut alors résoudre l'équation :

$$8x - 5y = 3 \Leftrightarrow 8x - 5(1 + 8k) = 3 \Leftrightarrow 8x - 5 - 40k = 3$$

$$\Leftrightarrow 8x = 8 + 40k \Leftrightarrow x = 1 + 5k$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\boxed{S = \{(1 + 5k; 1 + 8k) \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}$

c) Soit m un entier relatif tel qu'il existe un couple d'entier relatif $(p; q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$$

Montrer que le couple $(p; q)$ est solution de l'équation (E), puis, en déduire que $m \equiv 9 \quad (modulo\ 40)$

$$\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases} \Rightarrow 8p + 1 = 5q + 4 \Leftrightarrow 8p - 5q = 3$$

$\boxed{\text{Donc le couple } (p; q) \text{ est solution de l'équation } (E)}$

On a donc $p = 1 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Or : $m = 8p + 1 = m = 8(1 + 5k) + 1 = 8 + 40k + 1 = 9 + 40k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{m \equiv 9 \quad (modulo\ 40)}$

d) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2014

On veut :

$$m \geq 2014 \Leftrightarrow 9 + 40k \geq 2014 \Leftrightarrow k \geq \frac{2014 - 9}{40} = \frac{2005}{40} = 50{,}125$$

Le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2014 correspond donc à $k = 51$

On a alors $m = 9 + 40k = 9 + 40 \times 51 = 2049$

$\boxed{\text{2049 est le plus petit de ces nombres entiers } m \text{ supérieurs à 2014}}$

2)

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \quad (modulo\ 7)$

$$2^3 = 8 = 1 + 7 \equiv 1 \quad (modulo\ 7)$$

Or pour tout nombre entier naturel k, on a :

$$2^3 \equiv 1 \quad (modulo\ 7) \Rightarrow (2^3)^k \equiv 1^k \quad (modulo\ 7) \Rightarrow \boxed{2^{3k} \equiv 1 \quad (modulo\ 7)}$$

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2014} par 7 ?

On a $2014 = 2013 + 1 = 3 \times 671 + 1$

Or $2^{2013} = 2^{3\times 671} \equiv 1 \quad (modulo\ 7)$ d'après la question précédente

Et donc $2^{2014} = 2^{2013} \times 2 \equiv 2 \quad (modulo\ 7)$

Donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2014} par 7 est 2

3) Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$.

On rappelle qu'en base 10 ce nombre N s'écrit sous la forme $a00b$

On se propose de déterminer parmi ces nombres N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \quad (modulo\ 7)$

$$10^3 = 1000 = 7 \times 142 + 6 = 7 \times 143 - 1$$

Donc : $\boxed{10^3 \equiv -1 \quad (modulo\ 7)}$

b) En déduire tous les entiers N cherchés.

$$10^3 \equiv -1 \quad (modulo\ 7) \Rightarrow N = a \times 10^3 + b \equiv -a + b \quad (modulo\ 7)$$

On en déduit que N est divisibles par 7 $\Leftrightarrow N \equiv 0 \ (modulo\ 7) \Leftrightarrow -a + b \equiv 0 \ (modulo\ 7) \Leftrightarrow a \equiv b \ (modulo\ 7)$

Or

$a =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$a \equiv \cdots$	1	2	3	4	5	6	0	1	2	
$b =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b \equiv \cdots$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2

En recoupant ces deux tableaux on obtient :

$$\boxed{N \in \{1001; 1008; 2002; 2009; 3003; 4004; 5005; 6006; 7000; 7007; 8001; 8008; 9002; 9009\}}$$