EXERCICE 1 (Obligatoire)

1°

a) On a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) Initialisation : Pour $n = 3$

$$u_3 = \frac{7}{8} \geq 0$$

L'inégalité est vérifiée au rang 3

Hérédité : Si pour un certain entier naturel n fixé, on a :

$$u_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \geq 0 \quad \text{car } \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + n - 1 \geq n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n - 1$$

Or pour $n \geq 3$, on a : $n - 1 \geq 3 - 1 = 2 \geq 0$

Donc $u_{n+1} \geq 0$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n \geq 0}$$

c) Pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$u_n \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \geq n - 1$$

On a donc pour tout entier $n \geq 4 \Rightarrow n - 1 \geq 3$

$$u_{(n-1)+1} = u_n \geq (n-1) - 1 = n - 2$$

On a donc pour tout entier $n \geq 4$:

$$\boxed{u_n \geq n - 2}$$

d) Pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$u_n \geq n - 2$$

Et :

$$\lim_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

2°- a) Tout d'abord, il faut comprendre que cet algorithme va calculer les termes consécutifs de la suite (u_n) jusqu'au premier rang où le terme de la suite sera supérieur ou égal au seuil M entré par l'utilisateur.

Pour $M = 5$, d'après le tableau donné dans l'énoncé, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{39}{16}$	$\frac{135}{32}$	$\frac{391}{64}$
Test $u_n < M$	$1 < 5$ Vrai	$-\frac{1}{2} < 5$ Vrai	$-\frac{1}{4} < 5$ Vrai	$\frac{7}{8} < 1 < 5$ Vrai	$2{,}4375 < 5$ Vrai	$4{,}21875 < 5$ Vrai	$6{,}109375 < 5$ Faux

L'algorithme affichera $\boxed{n = 6}$

Pour $M = 10$, en reprenant et complétant le tableau précédent, on obtient :

n	6	7	8
u_n	$\frac{391}{64}$	$\frac{1031}{128}$	$\frac{2567}{256}$
Test $u_n < M$	$6{,}109375 < 10$ Vrai	$8{,}0546875 < 10$ Vrai	$10{,}02734375 < 10$ Vrai

L'algorithme affichera $\boxed{n = 8}$

b) L'algorithme calcule le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq M$

Or on a prouvé à la question **1) d)** que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Donc la suite (u_n) n'est pas majorée.

Ce qui signifie que pour tout réel M, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$

$\boxed{\text{Et donc l'algorithme s'arrêtera lorsque } n \text{ atteindra cette valeur } n_0}$

3°- a) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24)$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

Et d'autre part :

$$v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 4 + 24 = 28$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = 28}$

b) La suite est (v_n) une suite géométrique donc :

$$v_n = v_0\, q^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$v_n = 4u_n - 8n + 24 \Leftrightarrow 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24$$

$$\Leftrightarrow 4u_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \Leftrightarrow u_n = \frac{28}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8n}{4} - \frac{24}{4}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 \Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6}$$

c) On a, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 = x_n + y_n$$

En posant :

$$x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } y_n = 2n - 6$$

$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } x_0 = 7}$

$\boxed{\text{La suite } (y_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = 2 \text{ et de premier terme } y_0 = -6}$

d) Tout d'abord :

La suite (x_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $x_0 = 7$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 14 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

D'autre part :

La suite (y_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $y_0 = -6$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = (n+1) \times \frac{y_0 + y_n}{2} = (n+1) \times \frac{-6+2n-6}{2} = (n+1) \times \frac{2n-12}{2} = (n+1) \times (n-6)$$

Et donc pour la somme qui nous intéresse :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_n = 14 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1) \times (n-6)}$$

EXERCICE 1 (Spécialité)

1.

n est solution de (S) équivaut à $\boxed{\begin{cases} n \equiv 2\ [3] \\ n \equiv 3\ [5] \\ n \equiv 2\ [7] \end{cases}}$

2.

$\boxed{\text{Si } R = 2 \text{ et } S = 3 \text{ et } T = 2}$

3. Tout d'abord :

$$\begin{cases} n \equiv 2\ [3] \\ \\ n \equiv 2\ [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 \equiv 0\ [3] \\ \\ n-2 \equiv\ [7] \end{cases} \Leftrightarrow n-2 \equiv 0\ [3 \times 7] \text{ car 3 et 7 sont premiers entre eux} \Leftrightarrow n \equiv 2\ [21]$$

On a donc :

n est solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2\ [3] \\ n \equiv 3\ [5] \\ n \equiv 2\ [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2\ [21] \\ \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} n = 2 + 21p \\ \\ n = 3 + 5q \end{cases}}$ où p et q sont des entiers

4. Résoudre l'équation diophantienne $21p - 5q = 1$

On observe que $21 \times 1 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$

Donc le couple $(1; 4)$ est solution de cette équation.

On en déduit, d'après le théorème de Bézout, que 5 et 21 sont premiers entre eux

Soit $(p;q)$ une solution de cette équation, on a alors $\begin{cases} 21p-5q=1 \\ 21\times 1-5\times 4=1 \end{cases}$

On soustrait membre à membre ces deux équations, et on obtient :

$$21(p-1)-5(q-4)=0 \Leftrightarrow 21(p-1)=5(q-4)$$

21 divise le produit $5(q-4)$ et 21 et 5 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, 21 divise donc $q-4$

Il existe donc un entier k tel que $q-4=21k \Leftrightarrow q=4+21k$

On peut alors en déduire que : $21p-5q=1 \Leftrightarrow 21p-5(4+21k)=1 \Leftrightarrow 21p-20-5\times 21k=1$

$$\Leftrightarrow 21p=21+5\times 21k \Leftrightarrow p=1+5k$$

Les solutions de l'équation diophantienne $21p-5q=1$ sont de la forme $\boxed{(p;q)=(1+5k;4+21k)}$ où $k\in\mathbb{Z}$

5. En déduire les solutions du problème (S)

On a vu que :

n est solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} n=2+21p \\ n=3+5q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2+21p \\ 2+21p=3+5q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2+21p \\ 21p-5q=3-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=2+21p \\ 21p-5q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2+21p=2+21(1+5k)=2+21+105k=23+105k \\ p=1+5k \\ q=4+21k \end{cases}$$

Finalement, les solutions de (S) sont de la forme $\boxed{n=23+105k}$ où $k\in\mathbb{N}$

6. On entre $N=10000$ dans l'algorithme de la question 2.

a. Combien de solutions affichera l'algorithme ?

On doit pour cela résoudre l'inéquation :

$$0\leq 23+105k\leq 10000 \Leftrightarrow -23\leq 105k\leq 9977 \Leftrightarrow -\frac{23}{105}\leq k\leq \frac{9977}{105}$$

Or :

$$-\frac{23}{105}\approx -0{,}219 \quad \text{et} \quad \frac{9977}{105}\approx 95{,}019$$

Donc $k\in [\![0;95]\!]$

Ce qui signifie que l'algorithme affichera 96 solutions

b. Calculer les trois premiers entiers affichés par cet algorithme.

Les trois premiers entiers affichés par l'algorithme sont :

- Première valeur affichée : $23+105\times 0=\boxed{23}$
- Deuxième valeur affichée : $23+105\times 1=\boxed{128}$
- Troisième valeur affichée : $23+105\times 2=\boxed{233}$

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Partie A

1.

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}} \qquad z_B = \overline{z_A} = \boxed{\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$

2. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral

<u>1° méthode :</u> Avec module et argument

On calcule le quotient :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-3)}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (-3)} = \frac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = \frac{-3 - i\sqrt{3} + 6}{-3 + i\sqrt{3} + 6} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\left(3 - i\sqrt{3}\right)^2}{3^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{9 - 6i\sqrt{3} - 3}{9 + 3} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BC}{AC} = 1 \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = BC \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Donc le triangle ABC est isocèle en C et admet un angle géométrique mesurant $\frac{\pi}{3}$

Donc le triangle ABC est équilatéral

<u>2° méthode :</u> Avec module

On peut aussi calculer $= |z_B - z_A|$, $AC = |z_A - z_C|$ et $BC = |z_B - z_C|$ et vérifier que $AB = AC = BC$

A faire …

Partie B

1.

a)

$$M \text{ d'affixe } z \text{ est invariant} \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}iz^2 \Leftrightarrow 3z = iz^2 \Leftrightarrow 3iz = i^2z^2 \Leftrightarrow 3iz = -z^2 \Leftrightarrow z^2 + 3iz = 0$$

On a donc bien prouvé que :

$$M \text{ d'affixe } z \text{ est invariant} \Leftrightarrow z^2 + 3iz = 0$$

3

b) En déduire qu'il existe deux points invariants dont on donnera les affixes.

$$M \text{ d'affixe } z \text{ est invariant} \Leftrightarrow z^2 + 3iz = 0 \Leftrightarrow z(z + 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ z + 3i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ z = -3i \end{cases}$$

Les deux points invariants ont pour affixe $z = 0$ et $z = -3i$

2. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A ' , B ' et C'

Pour le point A' image du point A :

$$z_{A'} = \frac{1}{3} i {z_A}^2 = \frac{1}{3} i \left(\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} i \left(\sqrt{3}\right)^2 \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} i \times 3 e^{i\frac{5\pi}{6}\times 2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{10\pi+3\pi}{6}} = e^{i\frac{13\pi}{6}}$$

$$\boxed{z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Pour le point B' image du point B :

$$z_{B'} = \frac{1}{3} i {z_B}^2 = \frac{1}{3} i {\overline{z_A}}^2 = \overline{\frac{1}{3}(-i) {z_A}^2} = -\overline{\frac{1}{3} i {z_A}^2} = -\overline{z_{A'}} = -e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\boxed{z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

Ou alors, vous calculez « normalement » :

$$z_{B'} = \frac{1}{3} i {z_B}^2 = \frac{1}{3} i \left(\sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \cdots = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Pour le point C' image du point C :

$$z_{C'} = \frac{1}{3} i {z_C}^2 = \frac{1}{3} i (-3)^2 = \frac{1}{3} i \times 9 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{z_{C'} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

b) Démontrer l'alignement des points O , B , A '

On dispose de plusieurs méthodes pour prouver l'alignement des points :

<u>1° méthode :</u> Celle que vous n'aimez pas et vous avez bien tort, avec l'argument.

$$\text{Les points } O, B \text{ et } A' \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}\right) = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}\right) = arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_{A'} - z_O}\right) = arg\left(\frac{z_B - 0}{z_{A'} - 0}\right) = arg\left(\frac{z_B}{z_{A'}}\right)$$

Or :

$$\frac{z_B}{z_{A'}} = \frac{\sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{3} e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}\, e^{-i\pi}$$

Et donc :

$$\left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}\right) = arg\left(\sqrt{3}\, e^{-i\pi}\right) = -\pi$$

Donc les points O, B et A' sont alignés.

<u>2° méthode :</u> Celle que vous préférez en général et vous n'avez pas tort, avec la colinéarité des vecteurs.

Les points O, B et A' sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OB}$ où $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA'}} = k\, z_{\overrightarrow{OB}}$ où $k \in \mathbb{R}$

Je vais « tricher » un peu et travailler avec les formes algébriques, pour varier les calculs.

En fait c'est plus facile ici avec la forme exponentielle : Vérifiez le …

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OB}$ est :

$$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_O = z_B = \overline{z_A} = \overline{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est :

$$z_{\overrightarrow{OA'}} = z_{A'} - z_O = z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Il suffit alors de prouver que le quotient suivant est réel :

$$\frac{z_{\overrightarrow{OA'}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + i}{-3 - i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + i}{3 + i\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3} + i)(3 - i\sqrt{3})}{3^2 + \sqrt{3}^2} = -\frac{3\sqrt{3} - i\sqrt{3}^2 + 3i + \sqrt{3}}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{OA'}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = -\frac{4\sqrt{3} - \cancel{3i} + \cancel{3i}}{12} = -\frac{4\sqrt{3}}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA'}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} z_{\overrightarrow{OB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,\overrightarrow{OB}$$

Donc les points O, B et A' sont alignés.

<u>3° méthode :</u> Je ne pense pas que beaucoup y ait pensé, avec l'inégalité triangulaire.

Petit rappel élémentaire de géométrie : **Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est la ligne droite**

Conséquences :

$$\text{ABC est un triangle non aplati} \Leftrightarrow \begin{cases} AB + BC > AC \\ et \\ AC + CB > AB \\ et \\ BA + AC > BC \end{cases}$$

Cas des égalités :

$$\begin{cases} AB + BC = AC \Leftrightarrow B \in [AC] \\ \\ AC + CB = AB \Leftrightarrow C \in [AB] \\ \\ BA + AC = BC \Leftrightarrow A \in [BC] \end{cases}$$

Faîtes des dessins pour vous en convaincre.

Et donc :

Trois points sont alignés ⇔ Au moins l'une des trois inégalités triangulaires est une égalité

Dans notre exercice, cela se traduit par :

$$\text{Les points } O, B \text{ et } A' \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \begin{cases} OB + BA' = OA' \\ ou \\ OA' + A'B = OB \\ ou \\ A'O + OB = A'B \end{cases}$$

On calcule donc les trois longueurs :

$$OB = |z_B - z_O| = |z_B - 0| = |z_B| = \left|\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right| = \sqrt{3}$$

$$OA' = |z_{A'} - z_O| = |z_{A'} - 0| = |z_{A'}| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$$

$$BA' = |z_{A'} - z_B| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{9+6\sqrt{3}+3}{4} + \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+8\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = |1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$$

On a donc : $BA' = OB + OA'$

Donc les points O, B et A' sont alignés.

Bon d'accord, ce n'est peut être pas la méthode la plus facile, mais plus vous avez de cordes à votre arc …
Il y a d'autres méthodes, comme par exemple déterminer et utiliser une équation de la droite (OB) …

3. Montrer que si le triangle OMM ' est rectangle en O alors le point M est sur une droite que l'on précisera.

<u>1° cas :</u> Pour M = O

On sait alors d'après la question 1. b. que M' = O

Le triangle OMM' est assimilable à un point que l'on peut considérer comme rectangle en O

Dans ce cas on peut considérer que M appartient à toute droite passant par O

<u>2° cas :</u> Pour M ≠ O : $z_M \neq 0$ et donc $z_{M'} = \frac{1}{3}iz_M{}^2 \neq 0$

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = arg\left(\frac{z_{M'} - z_O}{z_M - z_O}\right) = arg\left(\frac{z_{M'} - 0}{z_M - 0}\right) = arg\left(\frac{z_{M'}}{z_M}\right) = arg(z_{M'}) - arg(z_M)$$

D'une part

$$OMM' \text{ est rectangle en } O \iff (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff arg(z_{M'}) - arg(z_M) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \iff arg(z_{M'}) = arg(z_M) + \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

D'autre part :

$$arg(z_{M'}) = arg\left(\frac{1}{3}iz_M{}^2\right) = arg\left(\frac{1}{3}\right) + arg(i) + arg(z_M{}^2) = 0 + \frac{\pi}{2} + 2arg(z_M) = \frac{\pi}{2} + 2arg(z_M) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Et on a donc :

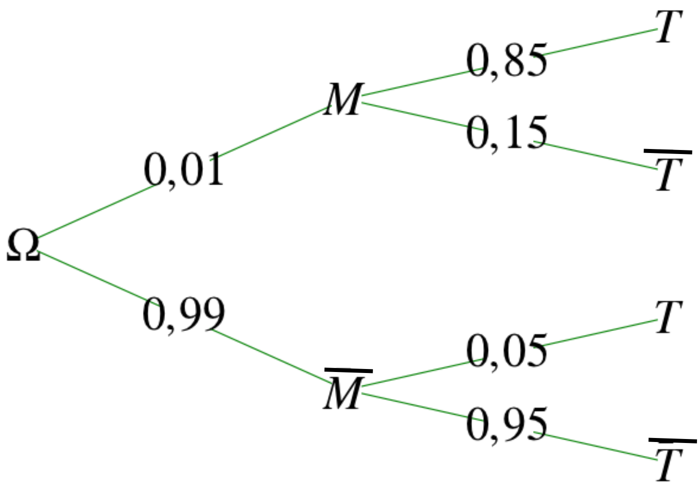
$$OMM' \text{ est rectangle en } O \iff \frac{\pi}{2} + 2arg(z_M) = arg(z_M) + \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 2arg(z_M) - arg(z_M) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \iff arg(z_M) = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in (Ox)$$

Dans les deux cas, si le triangle OMM ' est rectangle en O alors le point M appartient à l'axe des abscisses

EXERCICE 3 (Obligatoire)

1°- Arbre ci-dessous :



2°- a) La probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif est :

$$p(M \cap T) = p_M(T) \times p(M) = 0{,}85 \times 0{,}01 = \boxed{0{,}0085}$$

b) On applique la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p_M(T) \times p(M) + p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right) = 0{,}0085 + 0{,}99 \times 0{,}05 = \boxed{0{,}058}$$

3°- On choisit un animal parmi ceux dont le test est positif, la probabilité qu'il soit porteur de la maladie est :

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}0085}{0{,}058} = \frac{17}{116}$$

4°- On sait que $P(M \cap T) = 0{,}0085$, de plus $P(M) \times P(T) = 0{,}01 \times 0{,}058 = 0{,}00058$

Comme $P(M \cap T) \neq P(M) \times P(T)$, $\boxed{\text{les évènements } M \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants}}$

5°- a) On considère l'épreuve de Bernoulli dont l'événement succès est : Le test est positif

Le paramètre de cette épreuve de Bernoulli est $p = P(T) = 0{,}058$

La taille du troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes, pour assimiler le choix d'un animal du troupeau à un tirage successif avec remise.

On peut donc considérer que l'on répète l'épreuve de Bernoulli 5 fois de façon indépendante.

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'animaux parmi les cinq choisis qui ont un test positif. X suit la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}(5\,;\,0{,}058)}$

b) La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}058)^5 = \boxed{1 - 0{,}942^5 \approx 0{,}258}$$

6°- a) Soit C la variable aléatoire qui à chaque animal associe son coût pour l'éleveur.

Lorsque l'animal a un test positif , cela revient à 100€ pour l'éleveur, donc

$$P(C = 100) = P(T) = 0{,}058$$

Lorsque l'animal est malade et non dépisté par le test, cela revient à 1000€ à l'éleveur, donc

$$P(C=1000)=P(M\cap\overline{T})=0,01\times0,15=0,0015$$

Lorsque l'animal a un test négatif et qu'il n'est pas malade, cela ne coûte rien à l'éleveur

$$P(C=0)=P(\overline{T}\cap\overline{M})=0,99\times0,95=0,9405$$

Coût	0	100	1000	total
Probabilité	0,9405	0,058	0,0015	1

b) L'espérance mathématique est : $E(C)=0\times0,9405+100\times0,058+1000\times0,0015=7,3$

Le coût moyen à engager par animal est de 7,3 €.

c) Pour un troupeau de 200 bêtes, il doit prévoir $\boxed{200\times7,3=1460\text{€}}$

EXERCICE 4 (Obligatoire)

Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

1. f semble $\boxed{\text{croissante}}$ sur $[-3;2]$.

2. La position de la courbe par rapport à l'axe ?

La courbe semble en-dessous de cet axe sur $]-\infty;0]$ et au-dessus sur $[0;+\infty[$

Partie A- Contrôle de la première conjecture.

1.

$$f'(x)=4xe^{x-1}+2x^2e^{x-1}-2x=2x\,(2e^{x-1}+xe^{x-1}-1)=2x\left((2+x)e^{x-1}-1\right)=2x\,g(x)$$

Ce qui démontre que $\boxed{f'(x)\ \text{ est bien du signe } xg(x)}$ car $2>0$.

2.

a)

En $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2+x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(2+x)e^{x-1}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2+x)e^{x-1}-1\right)=+\infty$$

En $-\infty$:

$$g(x)=(2+x)e^{x-1}-1=2e^{x-1}+xe^{x-1}-1=2e^{-1}e^x+e^{-1}xe^x-1$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{-1}e^x+e^{-1}xe^x-1)=-1$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}\qquad\qquad\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=-1}$$

b) On va d'abord prouver que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \to e^{x-1}$ est la composée de la fonction affine $x \to x-1$ suivie de la fonction exponentielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ Donc, la fonction $x \to e^{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \to (2+x)e^{x-1}$ est le produit de la fonction affine $x \to x+2$ et de la fonction $x \to e^{x-1}$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \to (2+x)e^{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction g est la somme de la fonction $x \to (2+x)e^{x-1}$ et de la fonction constante $x \to -1$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 \times e^{x-1} + (2+x) \times (x-1)'e^{x-1} = e^{x-1} + (2+x)e^{x-1} = \boxed{(3+x)e^{x-1}}$$

Or $e^{x-1} > 0$ pour tout réel x

Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $3+x$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de la dérivée $g'(x)$		$-$	0	$+$	

c)

On en déduit que g est strictement décroissante sur $]-\infty; -3]$ puis strictement croissante sur $[-3; +\infty[$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de la dérivée $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de la fonction g	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(-3) = \big(2+(-3)\big)e^{-3-1} - 1 = -e^{-4} - 1$$

d)

Sur $]-\infty; -3]$:

D'après l'étude de ses variations, la fonction g est majorée par -1, donc elle ne peut pas s'annuler.

Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty; -3]$

Sur $[-3; +\infty[$:

On a prouvé à la question 2) b) que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et, à fortiori, sur $[-3; +\infty[$

D'après l'étude de ses variations, la fonction g est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$

Enfin :

$$\begin{cases} g(-3) = -e^{-4} - 1 < 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$$

Or : $0 \in \,]-e^{-4} - 1; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

A l'aide de la calculatrice :

$$\begin{cases} g(0{,}2) \approx -0{,}01 < 0 \\ g(0{,}21) \approx 0{,}003 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0{,}2 < \alpha < 0{,}21}$$

e) Avec ce qui précède , on a :

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
Variation de la fonction g	-1	$\searrow$ $-$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	$+\infty$

Et donc :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de la dérivée $g(x)$		$-$	0	$+$	

3.

a) Avec le signe de g précédemment étudié et comme $f'(x)$ est du signe $xg(x)$ avec $0 < 0{,}2 < \alpha$, on peut dresser le tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, puis strictement décroissante sur $[0; \alpha]$ et à nouveau strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$

c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Ainsi , f est croissante sur $[-3; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; 2]$, ce qui contredit la première conjecture

Partie B- Contrôle de la deuxième conjecture

1. Il nous faut résoudre l'équation $f(x) = 0$

$$2x^2e^{x-1} - x^2 = 0 \Leftrightarrow (2e^{x-1} - 1)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{x-1} - 1 = 0 \\ ou \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ ou \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -ln(2) \\ ou \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - ln(2) \\ ou \\ x = 0 \end{cases}$$

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $x = 1 - ln(2)$ et $x = 0$

2. Préciser alors la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.

$$1 - ln(2) \approx 0{,}3 > \alpha$$

Avec le A.3.b) et la question précédente , on en déduit que :

x	-4		0		α		$1 - ln(2)$		2
Variation de la fonction f		$-$ ↗	0	↘ $-$	$f(1)$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	$f(2)$

Ainsi, la courbe de f est en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty; 1 - ln(2)]$ et au dessus sur $[1 - ln(2); +\infty[$.

3. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

La réponse précédente contredit la 2ème conjecture.