

## Corrigé devoir commun seconde 2016(sujet A)

### Exercice 1

---

Dans tout l'exercice les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles et sous forme de valeurs décimales arrondies à  $10^{-3}$  près.

Deux usines produisent à elles deux 1078 engrenages pour les boîtes de vitesse de voitures par jour. On remarque que les deux usines produisent au total 1050 engrenages conformes qui peuvent être utilisés pour un moteur. De plus, on relève que sur les 616 engrenages produits par l'usine B, 16 sont défectueux.

1) a) Combien l'usine A produit-elle d'engrenages ?

Les deux entreprises produisent 1078 engrenages.  
L'usine B produit 616 engrenages.  
 $1078 - 616 = 462$ . Donc **l'usine A produit 462 engrenages.**

b) **Reproduire sur votre copie** et compléter le tableau suivant, on a résumé le nombre d'engrenages conformes et défectueux selon les usines de fabrication durant une période donnée.

	Conformes	Défectueux	Total
Usine A	<b>450</b>	<b>12</b>	<b>462</b>
Usine B	<b>600</b>	<b>16</b>	<b>616</b>
Total	<b>1050</b>	<b>28</b>	<b>1078</b>

2) On prend au hasard un engrenage fabriqué dans l'une ou l'autre des deux entreprises.

On considère les événements suivants :

A : « l'engrenage provient de l'usine A »

C : « l'engrenage est conforme ».

Définir par une phrase chacun des événements suivants puis calculer leurs probabilités :

$$\bar{A} : \text{« l'engrenage ne provient pas de l'usine A »} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) =$$
$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{462}{1078} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

$$\text{Ou } \bar{A} : \text{« l'engrenage provient de l'usine B »} \quad p(\bar{A}) = \frac{616}{1078} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

$\bar{A} \cap C$  : « l'engrenage provient de l'usine B et est conforme »

$$p(\bar{A} \cap C) = \frac{600}{1078} = \frac{300}{539} \approx 0,557$$

$A \cup C$  : « l'engrenage provient de l'usine A ou l'engrenage est conforme »

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{462}{1078} + \frac{1050}{1078} - \frac{450}{1078} = \frac{531}{539} \approx 0,985$$

$\bar{A} \cap \bar{C}$  : « l'engrenage provient de l'usine B et est défectueux »

$$p(\bar{A} \cap \bar{C}) = \frac{16}{1078} = \frac{8}{539} \approx 0,015$$

3) On a pris un engrenage conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?

$$p_3 = \frac{450}{1050} = \frac{3}{7} \approx 0,429$$

Quand on prend un engrenage conforme, la probabilité qu'il provienne de l'usine A est de  $\frac{3}{7}$ .

4) Le directeur de l'usine A est satisfait car il prétend que dans son usine, on a moins de chances de trouver un engrenage défectueux que dans l'usine B. Que penser de cette affirmation ?

La probabilité de trouver un engrenage défectueux dans l'usine A est :

$$P(A) = \frac{12}{462} = \frac{2}{77}$$

La probabilité de trouver un engrenage défectueux dans l'usine B est :

$$P(B) = \frac{16}{616} = \frac{2}{77}$$

Ces deux probabilités sont égales, donc on a autant de chances de trouver un engrenage défectueux dans les deux usines.

L'affirmation du directeur de l'usine A est donc fautive.

## Exercice 2

On considère dans un repère (O, I, J) les points  $A(4; -3)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(0; -7)$  et  $M(4; -1)$

1) Cf figure à la fin de l'exercice.

$$2) \text{ a) } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ -7 - (-3) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ -7 - 5 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} x_R - x_A \\ y_R - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} x_R - 4 \\ y_R - (-3) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} x_R - 4 \\ y_R + 3 \end{pmatrix}$$

R vérifie  $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ , ce qui se traduit par l'égalité de coordonnées suivante :

$$\begin{cases} x_R - 4 = \frac{1}{4} \times (-4) \\ y_R + 3 = \frac{1}{4} \times (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R - 4 = -1 \\ y_R + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = -1 + 4 \\ y_R = -1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 3 \\ y_R = -4 \end{cases} \quad \boxed{\text{Donc } R(3; -4).}$$

$$\text{d) } \overrightarrow{MR} \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ -4 - (-1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{MR} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Or,  $-1 \times (-12) - (-3) \times (-4) = 12 - 12 = 0$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{MR}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.

Par conséquent, les droites (MR) et (BC) sont parallèles.

$$3) \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Or  $0 \times 6 - (-2) \times 0 = 0 - 0 = 0$ , ainsi les vecteurs  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  sont colinéaires.

Donc les points M, A et B sont alignés.

4) b)

$$\bullet \quad \overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} x_p - 3 \\ y_p - (-4) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{RM} \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ -1 - (-4) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{RC} \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ -7 - (-4) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} x_p - 3 \\ y_p + 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{RM} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{RC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

L'égalité vectorielle  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{RC}$  se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} x_p - 3 = 1 - 3 \\ y_p + 4 = 3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = -2 + 3 \\ y_p = 0 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = 1 \\ y_p = -4 \end{cases} \quad \boxed{\text{Donc } P(1; -4).}$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{PB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - (-4) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PB} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Or,  $3 \times (-12) - 9 \times (-4) = -36 + 36 = 0$  donc les vecteurs  $\overrightarrow{PB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires. Par conséquent,  $\boxed{\text{les points P, B et C sont alignés.}}$

$$\text{c) } \overrightarrow{MR} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ -7 - (-4) \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc  $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PC}$ . Cette égalité vectorielle signifie que

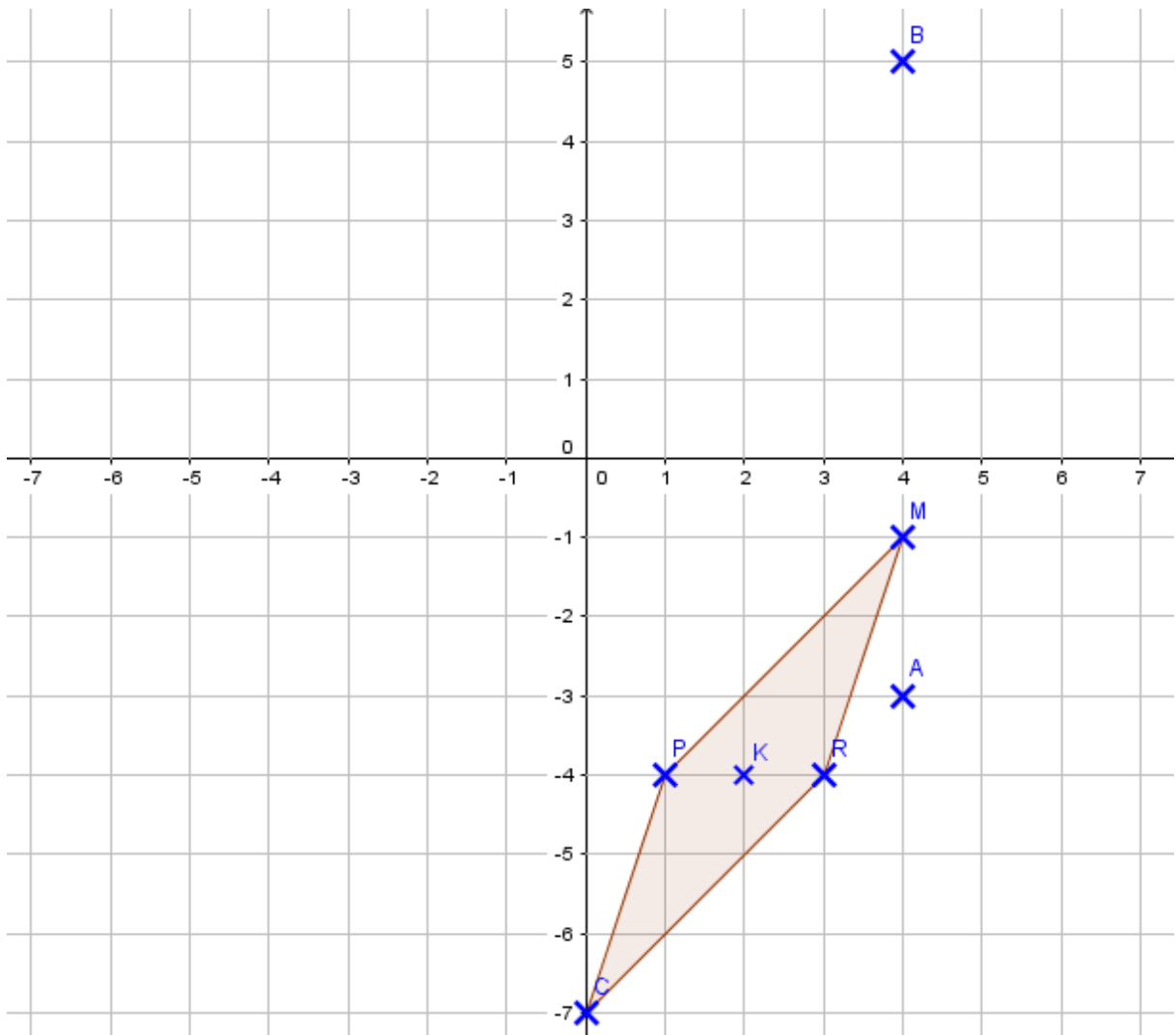
$\boxed{\text{MRCP est un parallélogramme.}}$

$$\text{d) Soit K le milieu de [CM], alors} \quad \begin{cases} x_K = \frac{x_C + x_M}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \\ y_K = \frac{y_C + y_M}{2} = \frac{-7 - 1}{2} = -4 \end{cases} \quad \boxed{\text{Donc } K(2; -4)}$$

$$\text{e) } MR = \sqrt{(x_R - x_M)^2 + (y_R - y_M)^2} \quad \text{et} \quad CR = \sqrt{(x_R - x_C)^2 + (y_R - y_C)^2}$$
$$= \sqrt{(3 - 4)^2 + (-4 - (-1))^2} \quad = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - (-7))^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} \quad = \sqrt{3^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{1 + 9} \quad = \sqrt{9 + 9}$$
$$= \sqrt{10} \quad = \sqrt{18}$$

Ainsi  $MR \neq CR$ .

Les deux côtés consécutifs du parallélogramme MRCP n'ont pas la même longueur, donc MRCP n'est pas un losange.



## Exercice 3

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -0,4x^2 + 1,6x + 2$

1) a) Par  $f$ ,  $-1$  a pour image 0 et 1 a pour image 3,2.

b) On cherche  $x$  tel que  $f(x) = 2$  soit  $-0,4x^2 + 1,6x + 2 = 2$   
ou encore  $-0,4x^2 + 1,6x = 0$ .

En factorisant par  $x$ , il vient :  $x(-0,4x + 1,6) = 0$ . On reconnaît une « équation produit » et on en déduit que soit  $x = 0$  soit  $-0,4x + 1,6 = 0$ , équation qui s'écrit  $-0,4x = -1,6$  et qui admet pour solution  $x = 4$ .

**Conclusion :** 2 a pour antécédents 0 et 4 par la fonction  $f$ .

2a) On a successivement :  $-0,4(x - 2)^2 + 3,6 = -0,4(x^2 - 4x + 4) + 3,6$   
 $= -0,4x^2 + 1,6x - 1,6 + 3,6$   
 $= -0,4x^2 + 1,6x + 2$   
 $= f(x)$ ,

donc  $f(x) = -0,4(x - 2)^2 + 3,6$

b) De même, on développe :

$(-0,4x + 2)(x + 1) = -0,4x^2 - 0,4x + 2x + 2 = -0,4x^2 + 1,6x + 2$ .

**Conclusion,**  $f(x) = (-0,4x + 2)(x + 1)$

3a)

X	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	car $a = -0,4$ car $a = 1$
$-0,4x + 2$	+		0	-	
$x + 1$	-	0	+	+	
f(x)	-	0	+	0	-

L'inéquation  $f(x) \geq 0$  admet donc **S = [-1 ; 5]** comme ensemble de solutions.

b) D'après l'écriture sous la forme  $-0,4(x - 2)^2 + 3,6$ , et puisque le coefficient de  $x^2$  vaut  $-0,4$  :

x	0	2
f(x)	2	3,6
		-2,8

4a) Pour  $X = 7$ , A prend la valeur  $-6,4$  (environ) donc A est négatif et l'algorithme affiche « X ne convient pas »

4b) Cet algorithme sert à « tester » si  $f(x)$  est strictement positif ou non.

## Partie B

Une personne lance un projectile P. Cette trajectoire est représentée partiellement dans le repère de l'Annexe 3.

Dans ce repère, l'axe des abscisses correspond au sol et les pieds du lanceur sont au point O. L'unité sur les deux axes est le mètre.

On suppose que la position initiale du projectile se trouve au point J (0; 2) et que P suit une trajectoire assimilée à la courbe C représentant la fonction  $f$  étudiée dans la partie A. Les coordonnées du projectile P sont donc  $(x; f(x))$ .

1) On considère A (3,9; 2,2)

a)  $AJ = \sqrt{(x_J - x_A)^2 + (y_J - y_A)^2}$  donc  $AJ = \sqrt{(0 - 3,9)^2 + (2 - 2,2)^2}$

soit **AJ =  $\sqrt{15,25}$  mètres.**

**AJ  $\approx$  3,91 (ou 3,9) mètres**

b) Le projectile passera par A si  $f(3,9) = 2,2$ . Comme  $f(3,9) = 2,156$  il est différent de 2,2 et donc **le projectile ne passera pas par A.**

2a) La hauteur du poids lorsque  $x = 3$  m est **3,2 mètres environ.**

2b) Le poids est au moins à la hauteur de 3,4 pour les valeurs de  $x$  **comprises entre 1,3 et 2,7 mètres.**

3a) La hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer est **3,6 mètres.**

3b) Le poids va retrouver le sol quand  $f(x) = 0$ . En prenant la forme factorisée,  $(-0,4x + 2)(x + 1) = 0$  pour  $-0,4x + 2 = 0$  ou pour  $x + 1 = 0$  soit  $x = 5$  ou  $x = -1$ . Cette dernière valeur est impossible (le poids ne pouvant pas « revenir en arrière »), donc **le poids va retomber à 5 mètres** des pieds du lanceur.

4) On peut résoudre  $-0,5x^2 + 2x + 2 = 0$ , pour répondre à la question posée, avec une calculatrice en « entrant » la fonction  $g$  et en regardant pour quelles valeurs elle s'annule.

On peut aussi résoudre l'équation  $g(x) = 0$  par le calcul (pour les plus téméraires !).

La calculatrice donne  $x \approx 4,82$  environ : le projectile n'ira donc pas plus loin !

*La valeur exacte est  $2 + 2\sqrt{2}$ .*

*Pour vérifications :*

