Corrigé devoir commun seconde 2016 (SujetB)

Exercice 1 points

<u>Dans tout l'exercice les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles et sous forme de valeurs décimales arrondies à 10^{-3} près.</u>

Deux usines produisent à elles deux 1395 engrenages pour les boîtes de vitesse de voitures par jour. On remarque que les deux usines produisent au total 1350 engrenages conformes qui peuvent être utilisés pour un moteur. De plus, on relève que sur les 775 engrenages produits par l'usine B, 25 sont défectueux.

1) a) Combien l'usine A produit-elle d'engrenages ?

Les deux entreprises produisent 1395 engrenages.
L'usine B produit 775 engrenages.
1395 – 775 = 620. Donc **l'usine A produit 620 engrenages**.

b) Reproduire sur votre copie et compléter le tableau suivant, on a résumé le nombre d'engrenages conformes et défectueux selon les usines de fabrication durant une période donnée.

	Conformes	Défectueux	Total
Usine A	**600**	**20**	**620**
Usine B	**750**	**25**	**775**
Total	**1350**	**45**	**1395**

2) On prend au hasard un engrenage fabriqué dans l'une ou l'autre des deux entreprises.

On considère les événements suivants :

A : « l'engrenage provient de l'usine A »

C : « l'engrenage est conforme ».

Définir par une phrase chacun des événements suivants puis calculer leurs probabilités :

$\bar{A}$: « l'engrenage ne provient pas de l'usine A » $p(\bar{A}) = 1 - p(A) =$

$p(\bar{A}) = 1 - \frac{620}{1395} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$

Ou $\bar{A}$: « l'engrenage provient de l'usine B » $p(\bar{A}) = \frac{775}{1395} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$

$\bar{A} \cap C$: « l'engrenage provient de l'usine B et est conforme »

$$p(\bar{A} \cap C) = \frac{750}{1395} = \frac{50}{93} \approx 0{,}538$$

$A \cup C$: « l'engrenage provient de l'usine A ou l'engrenage est conforme »

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{620}{1395} + \frac{1350}{1395} - \frac{600}{1395} = \frac{274}{279} \approx 0{,}982$$

$\bar{A} \cap \bar{C}$: « l'engrenage provient de l'usine B et est défectueux »

$$p(\bar{A} \cap \bar{C}) = \frac{25}{1395} = \frac{5}{279} \approx 0{,}018$$

3) On a pris un engrenage conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?

$$p_3 = \frac{600}{1350} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$$

Quand on prend un engrenage conforme, la probabilité qu'il provienne de l'usine A est de $\frac{4}{9}$.

4) Le directeur de l'usine A est satisfait car il prétend que dans son usine, on a moins de chances de trouver un engrenage défectueux que dans l'usine B.
Que penser de cette affirmation ?

La probabilité de trouver un engrenage défectueux dans l'usine A est :

$$P(A) = \frac{20}{620} = \frac{1}{31}$$

La probabilité de trouver un engrenage défectueux dans l'usine B est :

$$P(B) = \frac{25}{775} = \frac{1}{31}$$

Ceux deux probabilités sont égales, donc on a autant de chances de trouver un engrenage défectueux dans les deux usines.
L'affirmation du directeur de l'usine A est donc fausse.

Exercice 2

On considère dans un repère (O, I, J) les points $A(3;1), B(-1;5), C(3;-7)\ et\ M(3;-1)$

1) Cf figure à la fin de l'exercice.

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 5-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -7-5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} x_R - x_A \\ y_R - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} x_R - 3 \\ y_R - 1 \end{pmatrix}$

R vérifie $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit par l'égalité de coordonnées suivante :

$$\begin{cases} x_R - 3 = \frac{1}{4}\times(-4) \\ y_R - 1 = \frac{1}{4}\times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R - 3 = -1 \\ y_R - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 3-1 \\ y_R = 1+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 2 \\ y_R = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc } R(2;2).}$

d) $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Or, $-1\times(-12) - 4\times 3 = 12 - 12 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{Par conséquent, les droites } (MR) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles.}}$

3) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 3-3 \\ 1-(-1) \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} 3-3 \\ -7-(-1) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

Or $0\times(-6) - 2\times 0 = 0 - 0 = 0$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{Donc les points M, A et C sont alignés.}}$

4) b)

- $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} x_P-2 \\ y_P-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{RB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 5-2 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} x_P-2 \\ y_P-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RB}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RB}$ se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} x_P-2=1-3 \\ y_P-2=-3+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P=2-2 \\ y_P=2+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P=0 \\ y_P=2 \end{cases} \quad \boxed{Donc\ P(0;2).}$$

- $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 5-2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Or, $(-1)\times(-12)-4\times3=12-12=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, $\boxed{\text{les points P, B et C sont alignés.}}$

c) $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 5-2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{PB}$. Cette égalité vectorielle signifie que MRBP est un parallélogramme.

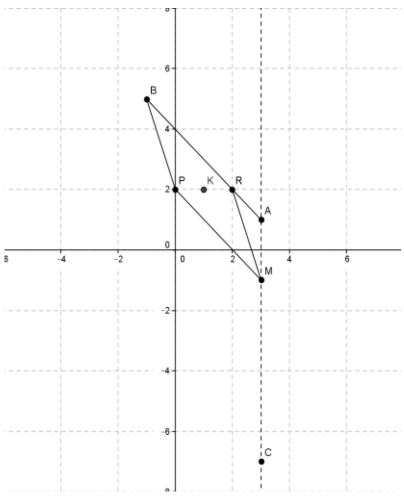
d) Soit K le milieu de [BM], alors $\begin{cases} x_K=\dfrac{x_B+x_M}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ y_K=\dfrac{y_B+y_M}{2}=\dfrac{5-1}{2}=-2 \end{cases}$ $\boxed{\text{Donc } K(1;-2)}$

e) $MR=\sqrt{(x_R-x_M)^2+(y_R-y_M)^2}$ et $BR=\sqrt{(x_R-x_B)^2+(y_R-y_B)^2}$

$$\begin{aligned} MR&=\sqrt{(2-3)^2+(2-(-1))^2} & BR&=\sqrt{(2-(-1))^2+(2-5)^2} \\ &=\sqrt{(-1)^2+(3)^2} & &=\sqrt{3^2+(-3)^2} \\ &=\sqrt{1+9} & &=\sqrt{9+9} \\ &=\sqrt{10} & &=\sqrt{18} \end{aligned}$$

Ainsi MR≠BR.

Les deux côtés consécutifs du parallélogramme MRBP n'ont pas la même longueur, donc MRBP n'est pas un losange.



B
P
K
R
A
M
C

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}6x + 1{,}6$

1) a) Par f, ***– 1 a pour image 0,9 et 1 a pour image 2,1.***

b) On cherche x tel que : $f\ (x)\ =\ 1{,}6$

Soit : $-0{,}1x^2 + 0{,}6x + 1{,}6 = 1{,}6$

ou encore $-0{,}1x^2 + 0{,}6x = 0.$

En factorisant par x, il vient : $x\,(-\ 0{,}1x\ +\ 0{,}6)\ =\ 0.$

On reconnaît une « équation produit » et on en déduit que :

soit : $x\ =\ 0$ soit : $-\ 0{,}1x\ +\ 0{,}6 =\ 0$, équation qui s'écrit $-\ 0{,}1\ x\ = -\ 0{,}6$ et qui admet pour solution $x\ =\ 6.$

Conclusion : 1,6 a pour antécédents 0 et 6 par la fonction f.

2a) On a successivement :

$$-0{,}1(x-3)^2 + 2{,}5 = -0{,}1(x^2 - 6x + 9) + \ 2{,}5$$
$$= -\ 0{,}1\ x^2 + \ 0{,}6\ x - \ 0{,}9 + \ 2{,}5$$
$$= -\ 0{,}1\ x^2 + 0{,}6\ x\ +\ 1{,}6\ = f(x).$$

Donc $\boldsymbol{f(x)\ =\ -0{,}1(x-3)^2 + 2{,}5}$.

b) De même, on développe :

$$(-0{,}1x\ +\ 0{,}8)(x+2) = -\ 0{,}1\ x^2 + \ 0{,}8\ x\ -\ 0{,}2\ x\ +\ 1{,}6$$
$$= \ -0{,}1x^2 + 0{,}6x\ +\ 1{,}6 = \ f(x).$$

Conclusion, $\boldsymbol{f(x) = (-0{,}1x\ +\ 0{,}8)(x+2)}$.

3a) Tableau de signes de $f(x) = (-0{,}1x\ +\ 0{,}8)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$	
$-0{,}1x\ +\ 0{,}8$		+		+	0	–		car a = – 0,1
$x+2$		–	0	+		+		car a = 1
$f(x)$		–	0	+	0	–		

L'inéquation $f(x) \geq 0$ admet donc **S = [– 2 ; 8]** comme ensemble de solutions.

b) D'après l'écriture sous la forme : $f(x)\ =\ -0{,}1(x-3)^2 + 2{,}5$, puisque le coefficient de x^2 vaut – 0,1 :

Tableau de variations de $f(x)$:

x	0 10	3	
$f(x)$	1,6 ↗	2,5	↘ – 2,4

4a) Pour X = 7, A prend la valeur 0,9 donc A est positif et l'algorithme affiche **« X convient »**

4b) Cet algorithme sert à **« tester » si f (x) est strictement positif ou non.**

Partie B

Une personne lance un projectile P. Cette trajectoire est représentée partiellement dans le repère de l'**Annexe 3**.

Dans ce repère, l'axe des abscisses correspond au sol et les pieds du lanceur sont au point O. L'unité sur les deux axes est le mètre.

On suppose que la position initiale du projectile se trouve au point J $(0;2)$ et que P suit une trajectoire assimilée à la courbe C représentant la fonction f étudiée dans la **partie A.** Les coordonnées du projectile P sont donc $\left(x;f(x)\right)$.

1) On considère A $(6;\ 1{,}6)$
Le projectile passera par A si : $f(6)\ =\ 1{,}6$.
Comme $f(6)\ = -0{,}1\ \times (6-3)^2 + 2{,}5 = -0{,}9 + 2{,}5 =\ 1{,}6$ donc **le projectile passera par A.**

2a) La hauteur du poids lorsque $x = 4\ m$ est ***2,4 mètres environ.***

2b) « Le poids est au moins à la hauteur de 2,4 m » revient à résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 2{,}4$ ce qui est vérifié par les valeurs de x **comprises entre 2 et 4 mètres.**

3a) La hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer est **2,5 mètres.** (voir tableau de variations de $f(x)$)

3b) Le poids va retrouver le sol quand f (x) = 0. En prenant la forme factorisée de $f(x)$:

$(-0{,}1x\ +\ 0{,}8)(x+2) = 0$ pour $-0{,}1x\ +\ 0{,}8 =\ 0$ ou pour $x + 2 =\ 0$ soit $x = 8$ ou $x = -2$.

Cette dernière valeur ne convient pas (le poids ne pouvant pas « revenir en arrière »), donc :

le poids va retomber à 8 mètres des pieds du lanceur.

4) On peut résoudre $-0{,}2x^2 + 1{,}2x + 1{,}6 = 0$, pour répondre à la question posée, avec une calculatrice en « entrant » la fonction g et en regardant pour quelles valeurs elle s'annule.

On peut aussi résoudre l'équation $g\ (x)\ =\ 0$ par le calcul (pour les plus téméraires !).

La calculatrice donne **x ≈ 7,12 environ :**

le projectile n'ira donc pas plus loin qu'au premier lancer !

La valeur exacte est : $\boldsymbol{x = 3 + \sqrt{17}}$.