BACCALAURÉAT BLANC n°2

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Obligatoire

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **7** pages numérotées de 1 à 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

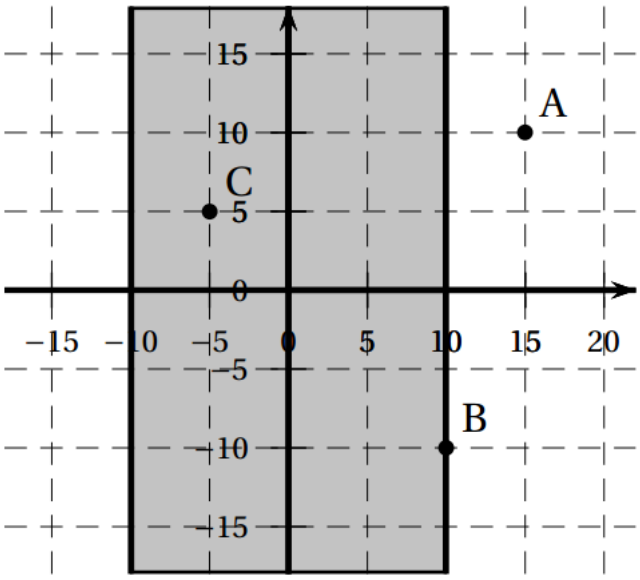
Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à $0{,}7$

1. Le concurrent tire cinq flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible. Justifier.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il tirer au minimum pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.



On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10 .

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit un point d'abscisse supérieure ou égale à 10.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0{,}7$? On arrondira au millimètre,

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=2\times10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. **a)** Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne moins de 2000 heures ?

b) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne moins de 7000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 5000 heures

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$.

a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t)=\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$. Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$.

b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\frac{1}{\lambda}$. Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\ln(x)+x+1$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 0,2 et 0,3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)+2]-2$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

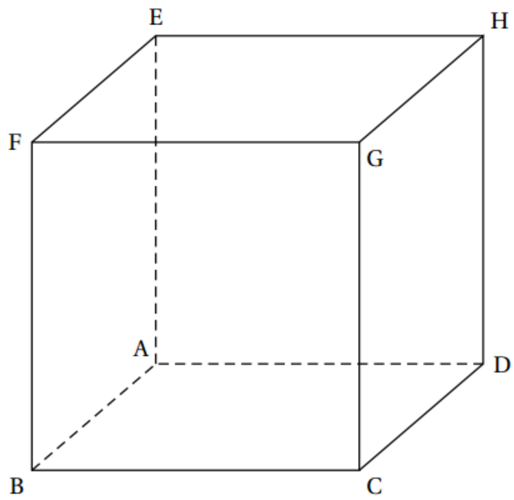
1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie C

Soit C' la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $\ln(x)-f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes C et C' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. **a)** Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.
   b) Calculer $I=\int_{e^{-2}}^{2}\frac{2+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 3 (4 points)



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ et $L(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$

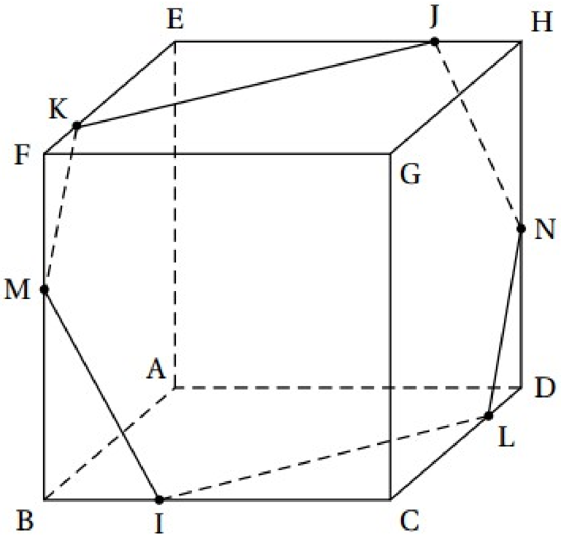
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a=\frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a=\frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).
Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.
a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8;9;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).
c) En déduire les coordonnées des points M et N

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n \quad : \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n - 0{,}8y_n \\ y_{n+1} = 0{,}8x_n + 0{,}6y_n \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

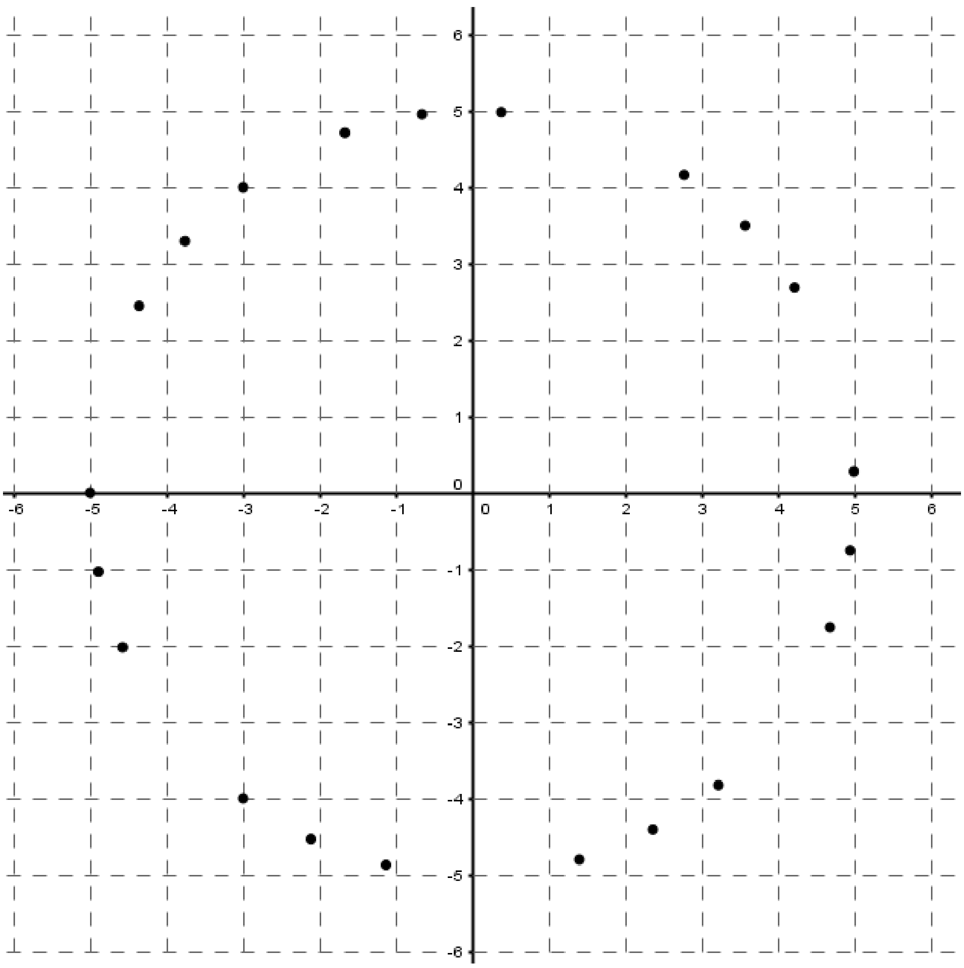
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

Compléter cet algorithme **sur l'annexe** (à rendre avec la copie) pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c) A l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant:



Identifier les points A_0, A_1 et A_2.. On les nommera sur la figure jointe **en annexe** (à rendre avec la copie).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

Le but des questions 2 et 3 est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

2. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$ l'affixe du point A_n

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0{,}6$ et $\sin(\theta) = 0{,}8$ (On ne cherchera pas à calculer θ)

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

3. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

b) Montrer que $\pi - \theta$ est un argument du nombre complexe z_0.

c) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n. Représenter θ sur la figure jointe en annexe, (à rendre avec la copie).

d) Exprimer $\arg(z_{n+1})$ en fonction de $\arg(z_n)$ et en déduire comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

NOM : **Prénom :** **Classe :**

ANNEXE pour l'exercice 4 – Non Spé

Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées $(x\,;\ y)$
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ....
    y prend la valeur ....
Fin Pour