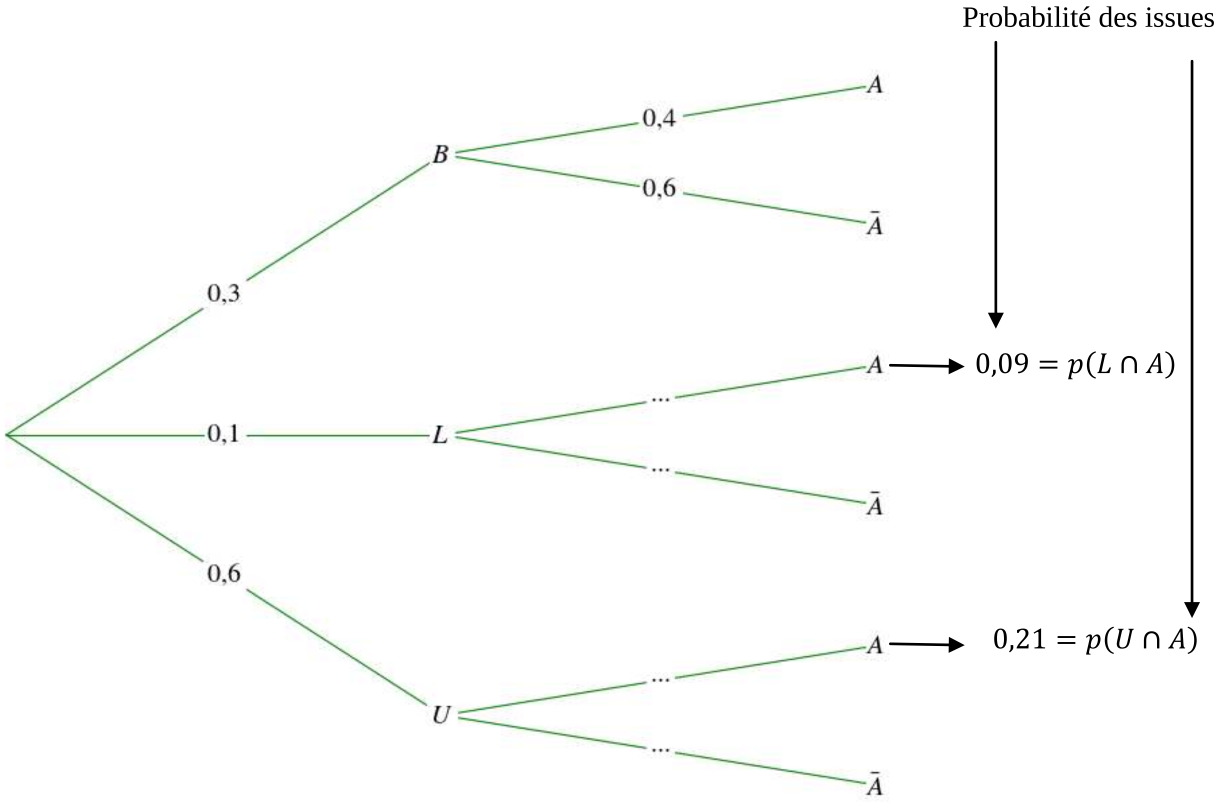
CORRECTION DU BACCALAURÉAT BLANC N°2

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

1)



2) La probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise est :

$$p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = \boxed{0{,}12}$$

3) La probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise est :

$$p(A) = p(B \cap A) + p(L \cap A) + p(U \cap A) = 0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}21 = \boxed{0{,}42}$$

4) La probabilité que le client ait loué une voiture de luxe sachant qu'il a souscrit une assurance sans franchise est :

$$p_A(L) = \frac{p(L \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}09}{0{,}42} = \boxed{\frac{3}{14} \approx 0{,}214}$$

Partie B

1) La probabilité d'attendre plus de douze minutes est :

$$p(T > 12) = \frac{20-12}{20-1} = \boxed{\frac{8}{19}}$$

2) Le temps d'attente moyen est de :

$$E(T) = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5\ min = \boxed{10\ \text{min}\ 30\ s}$$

Partie C

1) On a :

$$p(X > 250) = 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow\ 1 - p(X \leq 250) = 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow\ p(X \leq 250) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow\ \int_0^{250} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow\ \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{250} = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow\ -e^{-250\lambda} - (-e^0) = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow\ 1 - e^{-250\lambda} = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-250\lambda} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow\ -250\lambda = ln(0{,}2)$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\lambda = -\frac{1}{250} ln(0{,}2)}$$

2) La probabilité que moins de 100 véhicules soient ramenés dans une autre agence un mois donné est :

$$p(X < 100) = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{100}$$

$$= 1 - e^{-100\lambda} = 1 - e^{-100 \times \left(-\frac{1}{250} ln(0{,}2)\right)}$$

$$= \boxed{1 - e^{0{,}4 ln(0{,}2)} \approx 0{,}475}$$

EXERCICE 2 (5 points) (Non spécialiste)

3) Calcul des limites :

Limite en 0 par valeurs supérieures :

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{x\to 0^+} x ln(x) = 0 \\ \text{Par croissances comparées} \\ \\ \lim_{x\to 0^+} x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} 2x ln(x) - x = 0$$

Par produit et somme

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

Limite en $+\infty$:

$$f(x) = 2x ln(x) - x = x(2ln(x) - 1)$$

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} 2ln(x) - 1 = +\infty \\ \text{Par produit et somme} \\ \\ \lim_{x\to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} 2x ln(x) - x = +\infty$$

Par produit et somme

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

4) L'abscisse du point A est solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x ln(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow 2ln(x) - 1 = 0 \; car \; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

On a donc :

$$\boxed{A\left(e^{\frac{1}{2}}; 0\right)}$$

5) L'équation réduite de la tangente en A est :

$$y = f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$$

Avec :

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

On va calculer $f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$

$$f(x) = 2x ln(x) - x$$

$$f'(x) = 2\left(1 \times ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - 1 = 2(ln(x) + 1) - 1$$

$$= 2ln(x) + 2 - 1 = 2ln(x) + 1$$

On a donc :

$$f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 2ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) + 1 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$$

L'équation réduite de la tangente en A est donc :

$$y = 2 \times \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + 0 = 2x - 2e^{\frac{1}{2}}$$

L'équation réduite de la tangente (Δ) est bien $\boxed{y = 2x - 2e^{\frac{1}{2}}}$

6) On a :

$$g(x) = f(x) - 2x + 2e^{\frac{1}{2}}$$

a) On calcule l'expression de la dérivée g' :

$$g'(x) = f'(x) - 2 = 2ln(x) + 1 - 2 = 2ln(x) - 1$$

On étudie le signe de la dérivée g' :

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow ln(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$$

Et :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right]$ puis strictement croissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

b) D'après l'étude des variations de g, le minimum de g sur $]0; +\infty[$ est atteint en $e^{\frac{1}{2}}$ et vaut $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$

$$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - 2e^{\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}} = 0$$

On a donc :

$$g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2x + 2e^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 2x - 2e^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[$$

Or l'équation réduite de la tangente (Δ) est $y = 2x - 2e^{\frac{1}{2}}$

Cela prouve que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$

7)

$$H(x) = x^2\left(ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

a)

$$H'(x) = 2x\left(ln(x) - \frac{1}{2}\right) + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2xln(x) - x + x$$

$$= 2xln(x)$$

$$\boxed{H'(x) = 2xln(x)}$$

b) On en déduit la valeur exacte de l'intégrale :

$$I=\int_1^3\left(2xln(x)-3x+2e^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[x^2\left(ln(x)-\frac{1}{2}\right)-3\times\frac{x^2}{2}+2e^{\frac{1}{2}}\times x\right]_1^3$$

$$=3^2\left(ln(3)-\frac{1}{2}\right)-3\times\frac{3^2}{2}+2e^{\frac{1}{2}}\times 3-\left(1^2\left(ln(1)-\frac{1}{2}\right)-3\times\frac{1^2}{2}+2e^{\frac{1}{2}}\times 1\right)$$

$$=9\left(ln(3)-\frac{1}{2}\right)-\frac{27}{2}+6e^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=9ln(3)-\frac{9}{2}-\frac{27}{2}+6e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2e^{\frac{1}{2}}$$

$$=9ln(3)+4e^{\frac{1}{2}}-\frac{9+27-1-3}{2}$$

$$=9ln(3)+4e^{\frac{1}{2}}-\frac{32}{2}$$

$$\boxed{I=9ln(3)+4e^{\frac{1}{2}}-16}$$

On a :

$$g(x)=f(x)-2x+2e^{\frac{1}{2}}=g(x)=2xln(x)-x-2x+2e^{\frac{1}{2}}=2xln(x)-3x+2e^{\frac{1}{2}}$$

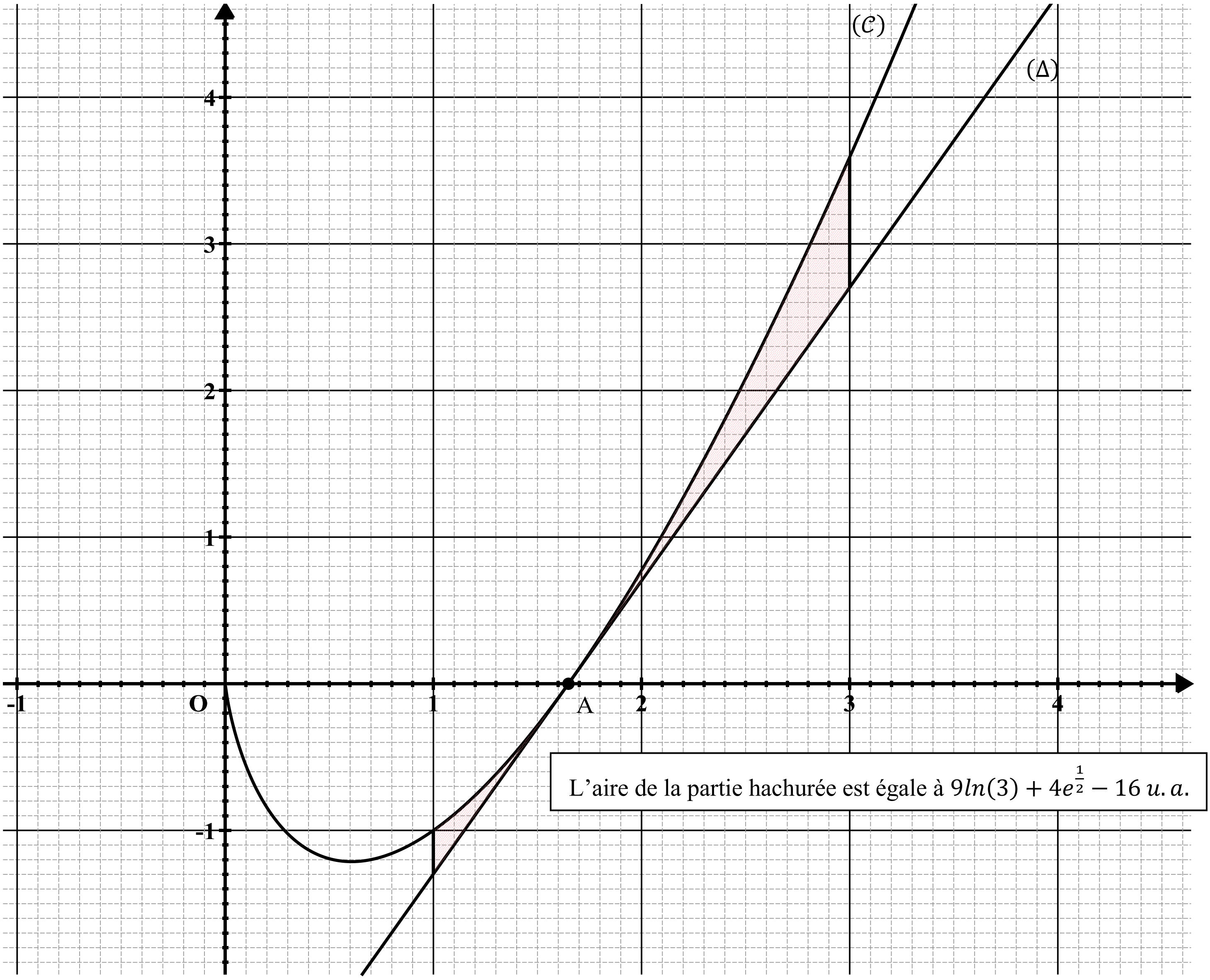
Et donc :

$$I=\int_1^3\left(2xln(x)-3x+2e^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int_1^3\left(f(x)-2x+2e^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3\left(2x-2e^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

On a prouvé à la question **4) b)** que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la tangente (Δ) d'équation $y=2x-2e^{\frac{1}{2}}$ sur $]0;+\infty[$

Ainsi l'intégrale I représente l'aire de la partie du plan, exprimée en unités d'aire, comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$ et sa tangente (Δ) sur l'intervalle $[1;3]$

En complément, voici le graphique :



EXERCICE 2 (5 points) (spécialiste)

1) D'après l'énoncé, on a $U_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

La quantité de fonds dans chaque agence au 1er janvier 2019 est donnée par la matrice :

$$U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \times 60 + 0{,}15 \times 30 + 1 \\ 0{,}2 \times 60 + 0{,}4 \times 30 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41{,}5 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Au 1er janvier 2019, il y a donc 41,5 millions d'euros dans l'agence X et 27 millions d'euros dans l'agence Y.

2)

a) A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{PDQ = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = A} \qquad \boxed{QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2}$$

b) On a :

$$QP = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de la deuxième ligne et deuxième colonne de la matrice QP est :

$$\boxed{\frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{8} \times 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1}$$

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $A^n = PD^nQ$

$A^n = (PDQ)^n = (PDQ)(PDQ)(PDQ) \ldots (PDQ)(PDQ)$ avec n facteurs PDQ

$= PD(QP)D(QP)D(QP) \ldots (QP)D(QP)DQ$

$= PDI_2\,DI_2\,DI_2 \;\ldots I_2\,DI_2\,DQ$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2

$= PDDD \ldots DDQ$ avec n facteurs D

On a donc bien $\boxed{A^n = PD^nQ}$

3) Tout d'abord on peut noter que $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$

a) On a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = AU_n + B - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$$

$$= A\left(V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}\right) + B - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = AV_n + A\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} + B - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$$

Or :

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} + B - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6 \times 5 + 0{,}15 \times 20/3 \\ 0{,}2 \times 5 + 0{,}4 \times 20/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ 3 - 20/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 3/3 \\ 1 + 8/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 11/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc bien pour tout entier naturel n : $\boxed{V_{n+1} = AV_n}$

b) On va montrer par récurrence que $V_n = A^n V_0$ pour tout entier naturel non nul

Initialisation : Au rang $n = 1$

On a bien $V_1 = AV_0$ d'après la question précédente.

L'assertion est donc vraie au rang $n = 1$

Hérédité : On suppose qu'à un certain rang n on a $V_n = A^n V_0$

Or d'après la question précédente $V_{n+1} = AV_n$

On en déduit que $V_{n+1} = AV_n = A(A^n V_0) = (AA^n)V_0 = A^{n+1}V_0$

Donc l'assertion est héréditaire.

Conclusion :

L'assertion est héréditaire et initialisée au rang 1

On a donc pour tout entier naturel non nul $\boxed{V_n = A^n V_0}$

4)

a) On a $V_n = A^n V_0$ avec :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}25 \times 0{,}3^n + 0{,}75 \times 0{,}7^n & 0{,}375(-0{,}3^n + 0{,}7^n) \\ 0{,}5(-0{,}3^n + 0{,}7^n) & 0{,}75 \times 0{,}3^n + 0{,}25 \times 0{,}7^n \end{pmatrix}$$

$$V_0 = U_0 - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 5 \\ 30 - 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 70/3 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \times 0{,}3^n + 0{,}75 \times 0{,}7^n & 0{,}375(-0{,}3^n + 0{,}7^n) \\ 0{,}5(-0{,}3^n + 0{,}7^n) & 0{,}75 \times 0{,}3^n + 0{,}25 \times 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55 \\ 70/3 \end{pmatrix}$$

En notant $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, le coefficient de la première ligne de la matrice colonne V_n est égal à :

$$a_n = (0{,}25 \times 0{,}3^n + 0{,}75 \times 0{,}7^n) \times 55 + 0{,}375(-0{,}3^n + 0{,}7^n) \times \frac{70}{3}$$

$$= 13{,}75 \times 0{,}3^n + 41{,}25 \times 0{,}7^n + 8{,}75(-0{,}3^n + 0{,}7^n)$$

$$= 13{,}75 \times 0{,}3^n + 41{,}25 \times 0{,}7^n - 8{,}75 \times 0{,}3^n + 8{,}75 \times 0{,}7^n$$

$$= 5 \times 0{,}3^n + 50 \times 0{,}7^n$$

On a donc $\boxed{V_n = \begin{pmatrix} 5 \times 0{,}3^n + 50 \times 0{,}7^n \\ b_n \end{pmatrix}}$

b) On a $U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 5 \\ b_n + 20/3 \end{pmatrix}$

Ainsi on obtient $\boxed{x_n = 5 \times 0{,}3^n + 50 \times 0{,}7^n + 5}$

Remarque : On retrouve bien que :

$$x_0 = 5 \times 0{,}3^0 + 50 \times 0{,}7^0 + 5 = 5 + 50 + 5 = 60$$

$$x_1 = 5 \times 0{,}3^1 + 50 \times 0{,}7^1 + 5 = 1{,}5 + 35 + 5 = 41{,}5$$

c)

La suite $(0{,}3^n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}3 \in]-1; 1[$ donc cette suite converge vers 0.

De même, $(0{,}7^n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}7 \in]-1; 1[$ qui converge vers 0.

Il en résulte que la suite (x_n) converge vers 5.

Cela signifie que la quantité de fonds disponibles dans l'agence X va tendre vers 5 millions d'euros.

EXERCICE 3 (4 points)

Partie A

1) On calcule :

$$P(z_0) = P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^3 - (2+i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1+i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2}$$

$$= -2i\sqrt{2} - (2+i\sqrt{2})(-2) + 2i\sqrt{2}(1+i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2}$$

$$= -4i\sqrt{2} + 2(2+i\sqrt{2}) + 2i\sqrt{2} - 4$$

$$= -4i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4$$

$$= 0$$

Ainsi le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$

2) On développe :

$$(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - i\sqrt{2}az - i\sqrt{2}b$$

$$= z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - i\sqrt{2}a)z - i\sqrt{2}b$$

Or on a $P(z) = z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$

Pour avoir $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$, il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2+i\sqrt{2}) \\ b - i\sqrt{2}a = 2(1+i\sqrt{2}) \\ -i\sqrt{2}b = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -(2+i\sqrt{2}) + i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} + i\sqrt{2} = -2 \\ b - i\sqrt{2}a = 2(1+i\sqrt{2}) \\ b = \dfrac{-2i\sqrt{2}}{-i\sqrt{2}} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b - i\sqrt{2}a = 2 - i\sqrt{2} \times (-2) = 2 + 2i\sqrt{2} = 2(1+i\sqrt{2}) \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}}$$

Ainsi, on a $\boxed{P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)}$

3) On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} z - i\sqrt{2} = 0 \\ ou \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{2} \\ ou \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Il reste à calculer les racines du trinôme $z^2 - 2z + 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

Le trinôme $z^2 - 2z + 2$ a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-(-2) - 2i}{2} = 1 - i \\ \\ z_2 = \overline{z_1} = 1 + i \end{cases}$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ sont :

$$\boxed{S = \{i\sqrt{2}; 1 - i; 1 + i\}}$$

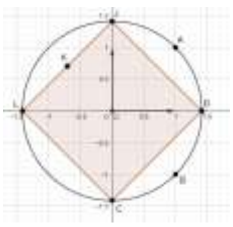
4) Sous forme exponentielle :

$$\begin{cases} z_0 = i\sqrt{2} \\ \\ z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \\ z_2 = \overline{z_1} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \\ z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ \\ z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}}$$

Partie B

1) *Unité non respectée.*

$\vec{v}$



$\vec{u}$

2)

L le symétrique du point J par rapport au point $K \Leftrightarrow K$ est le milieu de $[LJ]$

$$\Leftrightarrow z_K = \frac{z_L + z_J}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{z_L + i\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_L + i\sqrt{2} = 2e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow z_L = 2e^{\frac{3i\pi}{4}} - i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z_L = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Donc l'affixe de L est égale à } -\sqrt{2}}$

3) On a :

$$\begin{cases} OA = |z_A| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = \sqrt{2} \\ OJ = |z_J| = |i\sqrt{2}| = |i| \times |\sqrt{2}| = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ OL = |z_L| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Les points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

4) D'une part, on a :

$$\begin{cases} OC = |z_C| = |\overline{z_J}| = |z_J| = \sqrt{2} \\ OD = |z_D| = |-z_L| = |z_L| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ainsi les points C et D appartiennent aussi au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

On en déduit que le quadrilatère $CDJL$ est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

D'autre part :

$$\begin{cases} z_C = \overline{z_J} = -i\sqrt{2} \\ z_D = -z_L = \sqrt{2} \end{cases}$$

Les points C et J appartiennent à l'axe des ordonnées puisque leurs affixes sont des imaginaires purs.

Les points D et L appartiennent à l'axe des abscisses puisque leurs affixes sont des réels.

Ainsi les diagonales du quadrilatère $CDJL$ sont $[CJ]$ et $[DL]$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

On récapitule :

- Les diagonales du quadrilatère $CDJL$ se coupent en leur milieu O.

Donc $CDJL$ est un parallélogramme.

- Les diagonales du parallélogramme $CDJL$ sont de même longueur.

Donc $CDJL$ est un rectangle.

- Les diagonales du parallélogramme $CDJL$ sont perpendiculaires.

Donc $CDJL$ est un losange.

- $CDJL$ est un rectangle et un losange

Finalement, on en déduit que $CDJL$ est un carré.

EXERCICE 4 (4 points)

1)

a) (P) est le plan médiateur du segment $[AG]$.

Donc (P) coupe le segment $[AG]$ perpendiculairement en son milieu.

Notons Ω le milieu de $[AG]$, on a $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$

Donc :

$$\Omega\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right) \qquad \Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Et :

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Le plan (P) est donc le plan passant par $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y;z)$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{AG} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\times 1 + \left(y-\frac{1}{2}\right)\times 1 + \left(z-\frac{1}{2}\right)\times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z-\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y+2z-3=0$$

Une équation cartésienne du plan (P) est $\boxed{2x+2y+2z-3=0}$

b) I est le milieu de $[BC]$ et J est le milieu de $[CD]$

On a $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $D(0;1;0)$

Donc :

$$I\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right) \qquad I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$$

$$J\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0+0}{2}\right) \qquad J\left(\frac{1}{2};1;0\right)$$

On a alors :

$$2x_I+2y_I+2z_I-3 = 2\times 1 + 2\times\frac{1}{2} + 2\times 0 - 3 = 2+1-3 = 0$$

Et :

$$2x_J+2y_J+2z_J-3 = 2\times\frac{1}{2} + 2\times 1 + 2\times 0 - 3 = 1+2-3 = 0$$

$\boxed{\text{Donc les points I et J appartiennent au plan } (P)}$

2)

a) On a $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et donc :

$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Et on a $E(0;0;1)$

Une représentation paramétrique de la droite (EH) est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}}$$

b) Soit $M(x;y;z)$

$$M \in (P) \cap (EH) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \\ 2x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

On résout donc l'équation :

$$2 \times 0 + 2t + 2 \times 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la droite } (EH) \text{ et le plan } (P) \text{ sont sécants au point } K\left(0;\frac{1}{2};1\right)}$$

On observe que le point K est le milieu de $[EH]$ car $E(0;0;1), H(0;1;1)$ et $K\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

$$K\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$$

Voir figure

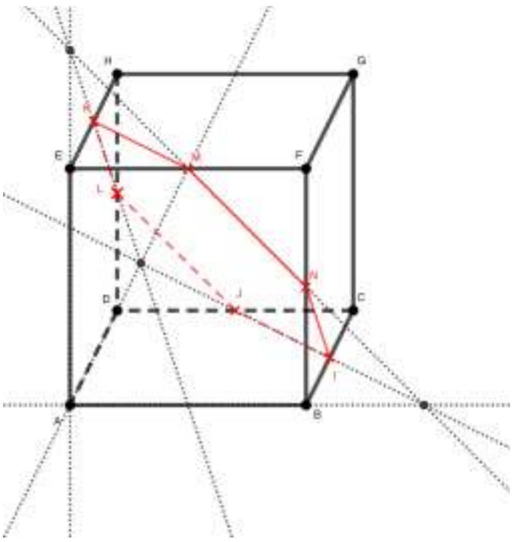
3) On sait déjà que les points I et J appartiennent au plan (P) et aux arêtes du cube $[BC]$ et $[DC]$

De même K appartient au plan (P) et à l'arête $[EH]$ puisque K est le milieu de $[EH]$

Ainsi le plan (P) sectionne le cube au moins en ces trois points.

A partir de ces trois points on peut construire la section du cube par le plan (P)

La section tracée en rouge est l'hexagone IJLKMN



H
G
K
E
M
F
L
N
J
D
C
I
A
B

EXERCICE 5 (3 points)

<u>1° méthode :</u>

<u>Principe de la méthode</u>

On étudie les variations de la suite (u_n) :

- Si on trouve qu'elle est croissante à partir d'un certain rang, on essayera de prouver qu'elle est aussi majorée.
- Si on trouve qu'elle est décroissante à partir d'un certain rang, on essayera de prouver qu'elle est aussi minorée.

Pour étudier les variations de la suite (u_n) on va étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^x} - \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{-nx-x} - e^{-nx}}{1+e^x}\right) dx = \int_0^1 (e^{-x} - 1)\frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx$$

Or pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 \leq 0$

Pour tout réel x et tout entier n, on a aussi $e^{-nx} > 0$ et $1 + e^x > 0$

On a donc pour tout $x \in [0; 1]$ et tout entier n :

$$(e^{-x} - 1)\frac{e^{-nx}}{1+e^x} \leq 0$$

On en déduit que pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (e^{-x} - 1)\frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq 0$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

On va donc chercher à prouver que la suite (u_n) est minorée

Or on a pour tout réel x et tout entier n, on a aussi $e^{-nx} > 0$ et $1 + e^x > 0$

On a donc pour tout $x \in [0; 1]$ et tout entier n :

$$\frac{e^{-nx}}{1+e^x} \geq 0$$

On en déduit que pour tout entier n :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \geq 0$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

Donc la suite (u_n) est convergente

Mais, avec cette méthode, on ne peut pas donner la limite de la suite (u_n)

La méthode suivante permet de prouver que la suite (u_n) est convergente **<u>en calculant sa limite</u>**

2° méthode :

Principe de la méthode

On cherche à encadre la suite (u_n) par deux suites ayant la même limite pour ensuite pouvoir utiliser le théorème des gendarmes.

Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$1 \leq e^x \leq e \Leftrightarrow 2 \leq 1+e^x \leq 1+e \Leftrightarrow \frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$$

Par ailleurs, pour tout réel x et tout entier n, on a aussi $e^{-nx} > 0$

Donc pour tout $x \in [0;1]$ et tout entier n :

$$\frac{e^{-nx}}{1+e} \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e}\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{n} \times \frac{e^{-nx}}{1+e}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq \left[-\frac{1}{n} \times \frac{e^{-nx}}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} \times \frac{e^{-n}}{1+e} - \left(-\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+e}\right) \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq -\frac{1}{n} \times \frac{e^{-n}}{2} - \left(-\frac{1}{n} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq \frac{1-e^{-n}}{2n}$$

Or on a :

$$\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n} = 1$$

Et donc :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1-e^{-n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (1+e)n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1-e^{-n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0$$

On a donc pour tout entier n

$$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2n}$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 0

Remarque : On aurait aussi pu utiliser un encadrement plus simple en utilisant l'un des résultats de la première méthode :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx \leq \frac{1-e^{-n}}{2n}$$