BACCALAURÉAT BLANC n°2

LYCEE DAUDET
SESSION DE 2018

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

Spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte **6** pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 1 (4 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.

Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30% des clients ont loué une berline et 10% ont loué un véhicule de luxe.
- 40% des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9% des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21% des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les événements suivants :

- **B** : le client a loué une berline.
- **L** : le client a loué un véhicule de luxe.
- **U** : le client a loué un véhicule utilitaire.
- **A** : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

1. Sur votre copie, créer l'arbre de probabilité qui permet d'illustrer la situation en incorporant l'ensemble des données de l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise ?
3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.
4. Calculer la probabilité que le client ait loué une voiture de luxe sachant qu'il a souscrit une assurance sans franchise.

PARTIE B

Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;20]$.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?
2. Préciser le temps d'attente moyen.

PARTIE C

Cette agence de location propose l'option retour du véhicule dans une autre agence.

Une étude statistique a établi que le nombre mensuel de véhicules rendus dans une autre agence peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Si pour un mois donné, le nombre de véhicules rendus dans une autre agence dépasse 250 véhicules, l'agence doit prévoir un rapatriement des véhicules. La probabilité de rapatriement est 0,2.

1. Déterminer la valeur exacte de λ
2. En déduire la probabilité que moins de 100 véhicules soient ramenés dans une autre agence un mois donné.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 2 (5 points)

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.

De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2018+n$, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

On suppose que le 1er janvier de l'année 2018, l'agence X possède 60 millions d'euros et l'agence Y possède 30 millions d'euros. L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1}=AU_n+B \text{, où } A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X *et* Y au 1er janvier 2019, exprimée en millions d'euros.

2) On note $D=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

a) A l'aide de votre calculatrice donner les matrices PDQ et QP

b) Expliciter le calcul du coefficient de la deuxième ligne et deuxième colonne de la matrice QP

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $A^n=PD^nQ$

3) On pose pour tout entier naturel n : $V_n=U_n-\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1}=AV_n$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul, on a $V_n=A^nV_0$

4) On admet que la matrice A^n s'exprime en fonction de n par :

$$A^n=\begin{pmatrix} 0{,}25\times 0{,}3^n+0{,}75\times 0{,}7^n & 0{,}375\left(-0{,}3^n+0{,}7^n\right) \\ 0{,}5\left(-0{,}3^n+0{,}7^n\right) & 0{,}75\times 0{,}3^n+0{,}25\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$$

a) Calculer le coefficient de la première ligne de la matrice colonne V_n en détaillant les calculs.

b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 3 (4 points)

PARTIE A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.
4. Écrire ces solutions sous forme exponentielle.

PARTIE B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives: $z_A=1+i$, $z_B=1-i$, $z_J=i\sqrt{2}$ et $z_K=e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C=\overline{z_J}$ et $z_D=-z_L$

   Quelle est la nature du quadrilatère $CDJL$? Justifier la réponse.

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 4 (4 points)

On admettra et on pourra utiliser les résultats suivants :

L'ensemble des points M de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan.

Ce plan est appelé plan médiateur du segment $[AB]$.

C'est le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et perpendiculaire à (AB).

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont l'arête est égale à 1.

I est le milieu de $[BC]$ et J est le milieu de $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On a donc, par exemple, $C(1;1;0)$

On donne une figure en annexe (à faire) qui sera à compléter et à rendre avec votre copie.

On note (P) le plan médiateur du segment $[AG]$.

1. **a)** Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

   b) Montrer que les points I et J appartiennent au plan (P).

2. **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).

   b) En déduire l'intersection de la droite (EH) et du plan (P).

3. Construire la section du cube par le plan (P) (On laissera les traces de construction apparentes).

Chaque exercice doit être traité sur une feuille séparée

EXERCICE 5 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

ANNEXE

A rendre avec l'exercice 4