Correction Bac Blanc

EXERCICE 1 (6 points)

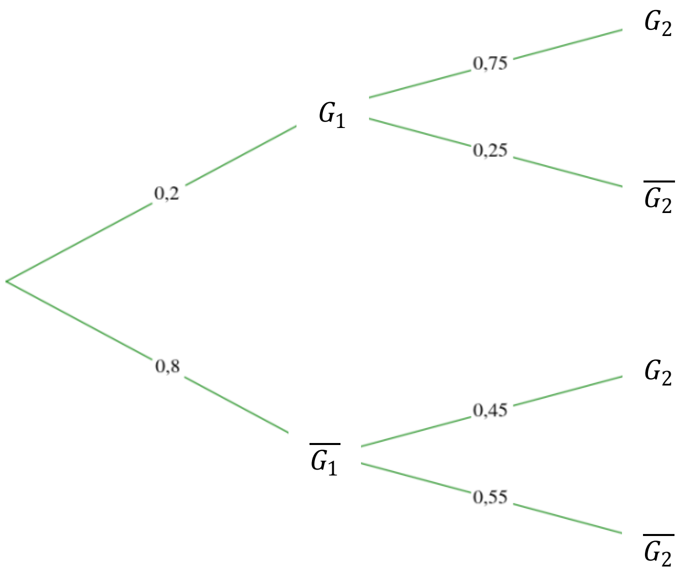
Partie A

1) On calcule :

$$p(G_1 \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$$

La probabilité qu'un joueur gagne les deux premières parties est de 0,15

2) On peut dresser un arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = p(G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0{,}15 + 0{,}8 \times 0{,}45 = 0{,}51$$

3)

a) On calcule :

$$p(G_1 \cup G_2) = p(G_1) + p(G_2) - p(G_1 \cap G_2) = 0{,}2 + 0{,}51 - 0{,}15 = 0{,}56$$

La probabilité que le joueur remporte son pari est de 0,56

b) On a :

$$E(X) = p(X = 10) \times 10 + p(X = -5) \times (-5) = 0{,}56 \times 10 - 0{,}44 \times 5 = 5{,}6 - 2{,}2 = \boxed{3{,}4}$$

En moyenne le joueur gagnera 3 € 40 c. lors de ce pari

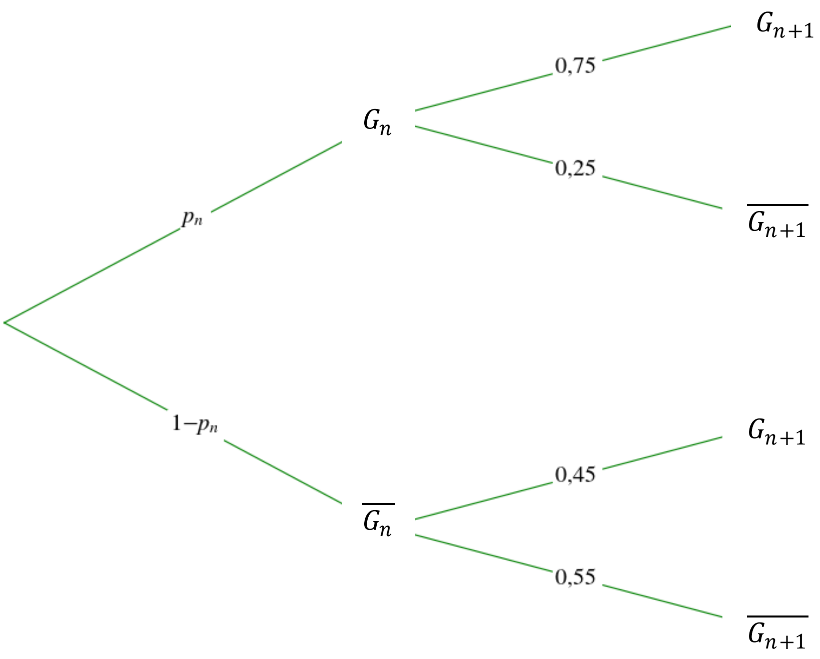
4) On calcule :

$$p_{G_2}(G_1) = \frac{p(G_1 \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}51} = \frac{5}{17}$$

Sachant que le joueur a gagné la deuxième partie, la probabilité qu'il ait gagné la première partie est de $\frac{5}{17}$

Partie B

1) On peut dresser un arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$$

$p_{n+1} = p_n \times 0{,}75 + (1 - p_n) \times 0{,}45$

$\quad = 0{,}75p_n + 0{,}45 - 0{,}45p_n$

$\quad = 0{,}3p_n + 0{,}45$

On a donc bien :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{9}{20}}$$

2) On calcule :

$$p(G_3) = p_3 = \frac{3}{10}p_2 + \frac{9}{20} = \frac{3}{10} \times 0{,}51 + \frac{9}{20} = 0{,}603$$

La probabilité que le joueur gagne la troisième partie est de 0,603

3)

a) On a tapé la formule = 3/10*B2+9/20

b)

On peut conjecturer que la suite (p_n) converge vers 0,6428 environ

4) Posons P_n l'assertion :

$$p_n = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

Initialisation : Au rang $n = 1$

$$\frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^1 = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{14} - \frac{31}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{45 - 31}{70} = \frac{14}{70} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = p_1$$

L'assertion P_1 est donc vraie

<u>Hérédité :</u> On suppose que l'assertion P_n est vraie à un certain rang n

C'est-à-dire que :

$$p_n = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{3}{10} p_n + \frac{9}{20} \\
&= \frac{3}{10}\left(\frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n\right) + \frac{9}{20} \\
&= \frac{27}{140} - \frac{3}{10} \times \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n + \frac{9}{20} \\
&= \frac{27+63}{140} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n+1} \\
&= \frac{90}{140} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n+1} \\
&= \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que :

$$p_{n+1} = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n+1}$$

Donc l'assertion P_n est vraie implique que P_{n+1} est vraie

Ce qui prouve que l'assertion P_n est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> On suppose que l'assertion P_n est héréditaire et initialisée au rang $n = 1$

Donc P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$

C'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{p_n = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

5)

a) On a :

$$\frac{3}{10} \in]-1; 1[$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n\right] = \frac{9}{14}$$

La suite (p_n) converge vers $\frac{9}{14} \approx 0{,}6429$ à 10^{-4} près

Cela prouve la conjecture concernant la limite de la suite (p_n)

b) On a donc :

$$L = \frac{9}{14}$$

$$0 < L - p_n < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{9}{14} - \left[\frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n\right] < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{9}{14} - \frac{9}{14} + \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{10}\right)^n < \frac{21}{31} \times 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{3}{10}\right)^n < ln\left(\frac{21}{31} \times 10^{-6}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \times ln\left(\frac{3}{10}\right) < ln\left(\frac{21}{31} \times 10^{-6}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{ln\left(\frac{21}{31} \times 10^{-6}\right)}{ln\left(\frac{3}{10}\right)} \text{ car } ln\left(\frac{3}{10}\right) < 0$$

Or :

$$\frac{ln\left(\frac{21}{31} \times 10^{-6}\right)}{ln\left(\frac{3}{10}\right)} \approx 11{,}798$$

On a donc $0 < L - p_n < 10^{-6}$ pour tout entier naturel $\boxed{n \geq 12}$

EXERCICE 2 (6 points)

1)

a) On a :

$$
\begin{aligned}
e^{-x}\left(cos(x)+sin(x)\right) &= e^{-x}\left(cos(x)+sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}e^{-x}\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$\boxed{e^{-x}\left(cos(x)+sin(x)\right)=\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

b) On a donc :

$$f(x)=e^{-x}\left(cos(x)+sin(x)\right)-\frac{1}{2}=\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$$

On peut alors résoudre l'équation :

$$f(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\ car\ e^{-x}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\ avec\ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ avec\ k\in\mathbb{Z}$$

On résout l'équation sur $[0;+\infty[$

$$\boxed{S=\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi\ /k\in\mathbb{N}\right\}}$$

2) On a pour tout réel x :

$$-1\leq sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\,e^{-x}\leq\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}\,e^{-x}\ car\ \sqrt{2}e^{-x}>0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\,e^{-x}-\frac{1}{2}\leq\sqrt{2}\,e^{-x}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\leq\sqrt{2}\,e^{-x}-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{2}\,e^{-x}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}\,e^{-x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Par composition Par somme et produit

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{1}{2}}$$

3) On va d'abord justifier que la fonction f est dérivable sur $[0;\pi]$

La fonction $x \to e^{-x}$ est la composée de la fonction linéaire $x \to -x$ dérivable sur $[0;\pi]$ suivie de la fonction exponentielle dérivable sur $[-\pi;0]$

Donc la fonction $x \to e^{-x}$ est dérivable sur $[0;\pi]$

La fonction $x \to cos(x) + sin(x)$ est la somme des fonctions cosinus et sinus toutes deux dérivables sur $[0;\pi]$

Donc la fonction $x \to cos(x) + sin(x)$ est dérivable sur $[0;\pi]$

La fonction $x \to e^{-x}\big(cos(x) + sin(x)\big)$ est le produit des fonctions $x \to e^{-x}$ et $x \to cos(x) + sin(x)$ toutes deux dérivables sur $[0;\pi]$

Donc la fonction $x \to e^{-x}\big(cos(x) + sin(x)\big)$ est dérivable sur $[0;\pi]$

La fonction f est la somme de la fonction $x \to e^{-x}\big(cos(x) + sin(x)\big)$ et de la fonction constante $x \to -\frac{1}{2}$ toutes deux dérivables sur $[0;\pi]$

Donc la fonction f est dérivable sur $[0;\pi]$

$$f'(x) = -e^{-x}\big(cos(x) + sin(x)\big) + e^{-x}\big(-sin(x) + cos(x)\big)$$

$$= -e^{-x}\big(cos(x) + sin(x) + sin(x) - cos(x)\big)$$

$$= -e^{-x} \times 2sin(x)$$

$$\boxed{f'(x) = -2sin(x)e^{-x}}$$

On a $sin(x) \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in [0;\pi]$

Donc $f'(x) = -2sin(x)e^{-x} \leq 0$ pour tout $x \in [0;\pi]$

De plus $f'(x) = 0$ sur $[0;\pi]$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pi$

La dérivée f' est négative sur $[0;\pi]$ et ne s'annule qu'en deux points, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0;\pi]$

x	0		π
Signe de la dérivée f'		$-$	
Variation de la fonction f	1	$\searrow$	$-e^{-\pi}$

$$f(0) = e^{-0}\big(cos(0) + sin(0)\big) = 1$$

$$f(\pi) = e^{-\pi}\big(cos(\pi) + sin(\pi)\big) = -e^{-\pi}$$

4) D'après la question précédente, la fonction f est dérivable donc continue sur $[0;\pi]$

D'après l'étude des variations la fonction f est strictement décroissante sur $[0;\pi]$

Enfin on a :

$$\left.\begin{aligned} f(0) = 1 > 0 \\ f(\pi) = -e^{-\pi} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \in [f(\pi); f(0)]$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (ou d'après le théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[0;\pi]$

5)

a) Erreur d'énoncé la dernière ligne du tableau est fausse ce qui fausse tout le tableau

A	0	0	**0**	**0,3927**	0,5890	0,6872	0,7363	0,7609	0,7731	0,7793	0,7823
B	3,1416	1,5708	**0,7854**	**0,7854**	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854
$\|B-A\|$	3,1416	1,5708	**0,7854**	**0,3927**	0,1963	0,0982	0,0491	0,0245	0,0123	0,0061	0,0031
C	1,5708	0,7854	**0,3927**	**0,5890**	0,6872	0,7363	0,7609	0,7731	0,7793	0,7823	0,7839
$f(A)$	0,5	0,5	**0,5**	**0,3822**	0,2696	0,2079	0,1764	0,1606	0,1527	0,1488	0,1468
$f(C)$	*− 0,5432*	*− 0,2921*	***0,1448***	***0,1448***	*0,1448*	*0,1448*	*0,1448*	*0,1448*	*0,1448*	*0,1448*	*0,1448*

En fait voici le bon tableau :

A	0	0	0,7854	0,7854	0,9817	0,9817	0,9817	1,0063	1,0063	1,0124	1,0124
B	3,1416	1,5708	1,5708	1,1781	1,1781	1,0799	1,0308	1,0308	1,0186	1,0186	1,0155
$\|B-A\|$	3,1416	1,5708	0,7854	0,3927	0,1963	0,0982	0,0491	0,0245	0,0123	0,0061	0,0031
C	1,5708	0,7854	1,1781	0,9817	1,0799	1,0308	1,0063	1,0186	1,0124	1,0155	1,0140
$f(A)$	0,5000	0,5000	0,1448	0,1448	0,0197	0,0197	0,0197	0,0044	0,0044	0,0006	0,0006
$f(C)$	-0,2921	0,1448	-0,0978	0,0197	-0,0404	-0,0107	0,0044	-0,0031	0,0006	-0,0012	-0,0003

b) D'après le mauvais tableau, on aurait $A \approx 0{,}7793$ et $B \approx 0{,}7854$

C'est-à-dire :

$$A = \frac{127\pi}{512} \ et \ B = \frac{\pi}{4}$$

L'algorithme proposé est un algorithme de dichotomie qui permet d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0;\pi]$

On aurait donc ainsi obtenu :

$$\frac{127\pi}{512} < x_0 < \frac{\pi}{4}$$

Mais ce résultat est faux puisque le tableau est faux.

Voici le bon encadrement obtenu avec le bon tableau :

$$\boxed{A \approx 1{,}0124 \text{ et } B \approx 1{,}0186}$$

C'est-à-dire en réalité :

$$\boxed{A = \frac{165\pi}{512} \ et \ B = \frac{83\pi}{256}}$$

L'algorithme proposé est un algorithme de dichotomie qui permet d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0;\pi]$

On a donc ainsi obtenu :

$$\boxed{\frac{165\pi}{512} < x_0 < \frac{83\pi}{256}}$$

EXERCICE 3 (5 points)

1)

Calcul du module :

$$|c| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Calcul d'un argument :

$$\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ sin(\theta) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On peut prendre à 2π près :

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Ainsi, on a obtenu :

$$\boxed{c = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

2)

a) On peut répondre à cette question soit sous forme algébrique soit sous forme exponentielle

<u>**1° méthode :**</u> Avec la forme algébrique

$$\begin{aligned} b &= \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1 - i) \\ &= 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - i - i^2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - i + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{b = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3} - 3}{3}}$$

<u>**2° méthode :**</u> Avec la forme exponentielle

On observe d'abord que :

$$a = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

On a donc :

$$b = ca = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3} e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{6}}{3} e^{i\frac{2\pi - 3\pi}{12}}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{b = \frac{2\sqrt{6}}{3} e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

b) Là aussi on peut répondre à cette question soit sous forme algébrique soit sous forme exponentielle

1° méthode : Avec la forme algébrique

On doit résoudre l'équation :

$$-i=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-i}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-3i}{3+i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-3i\left(3-i\sqrt{3}\right)}{3^2+\sqrt{3}^2}=\frac{-9i+3i^2\sqrt{3}}{9+3}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}-9i}{12}=\frac{3\left(-\sqrt{3}-3i\right)}{3\times 4}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{a=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i}$$

2° méthode : Avec la forme exponentielle

On observe d'abord que :

$$b=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On doit résoudre l'équation :

$$e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}a\Leftrightarrow a=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}e^{i\frac{-3\pi-\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{4\pi}{6}}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{a=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

3)

a) D'une part on a :

$$|b|^2=|ca|^2=|c|^2|a|^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2|a|^2=\frac{4}{3}|a|^2$$

D'autre part, on a :

$$|a|^2+|b-a|^2=|a|^2+|ca-a|^2=|a|^2+|(c-1)a|^2$$

$$=|a|^2+|c-1|^2|a|^2=|a|^2+\left|1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right|^2|a|^2$$

$$=|a|^2+\left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^2|a|^2=|a|^2+|i|^2\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|^2|a|^2$$

$$=|a|^2+1^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2|a|^2=|a|^2+\frac{3}{9}|a|^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)|a|^2=\frac{4}{3}|a|^2$$

On a donc bien $\boxed{|b|^2=|a|^2+|b-a|^2}$

b) On vient de prouver que $|b|^2 = |a|^2 + |b-a|^2$

Or on sait que $\begin{cases} |a| = OA \\ |b| = OB \\ |b-a| = AB \end{cases}$

Ce qui signifie que l'on a prouvé que $OB^2 = OA^2 + AB^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que $\boxed{\text{le triangle OAB est un triangle rectangle en A}}$

4) On sait que :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right) = arg\left(\frac{b}{a}\right) = arg\left(\frac{ca}{a}\right) = arg(c) = arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près}}$$

5) Voici différents éléments permettant de construire le point B :

- On sait que le triangle OAB est rectangle en A (question **3) b)**)

$\boxed{\text{Le point B appartient donc à la perpendiculaire à la droite } (OA) \text{ passant par A}}$

- On sait d'après la question précédente que :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Et d'après l'énoncé :

$$(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = arg(a) = arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Ainsi, on a d'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u};\overrightarrow{OB}) = (\vec{u};\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{\text{Ainsi le point B appartient à la demi droite d'origine O et dont l'angle avec le vecteur } \vec{u} \text{ est } \frac{\pi}{3}\ rad \text{ soit } 60°}$

Les deux premières informations suffisent à construire le point B

Mais si cela ne vous suffit on peut aussi en complément (ou substitut) :

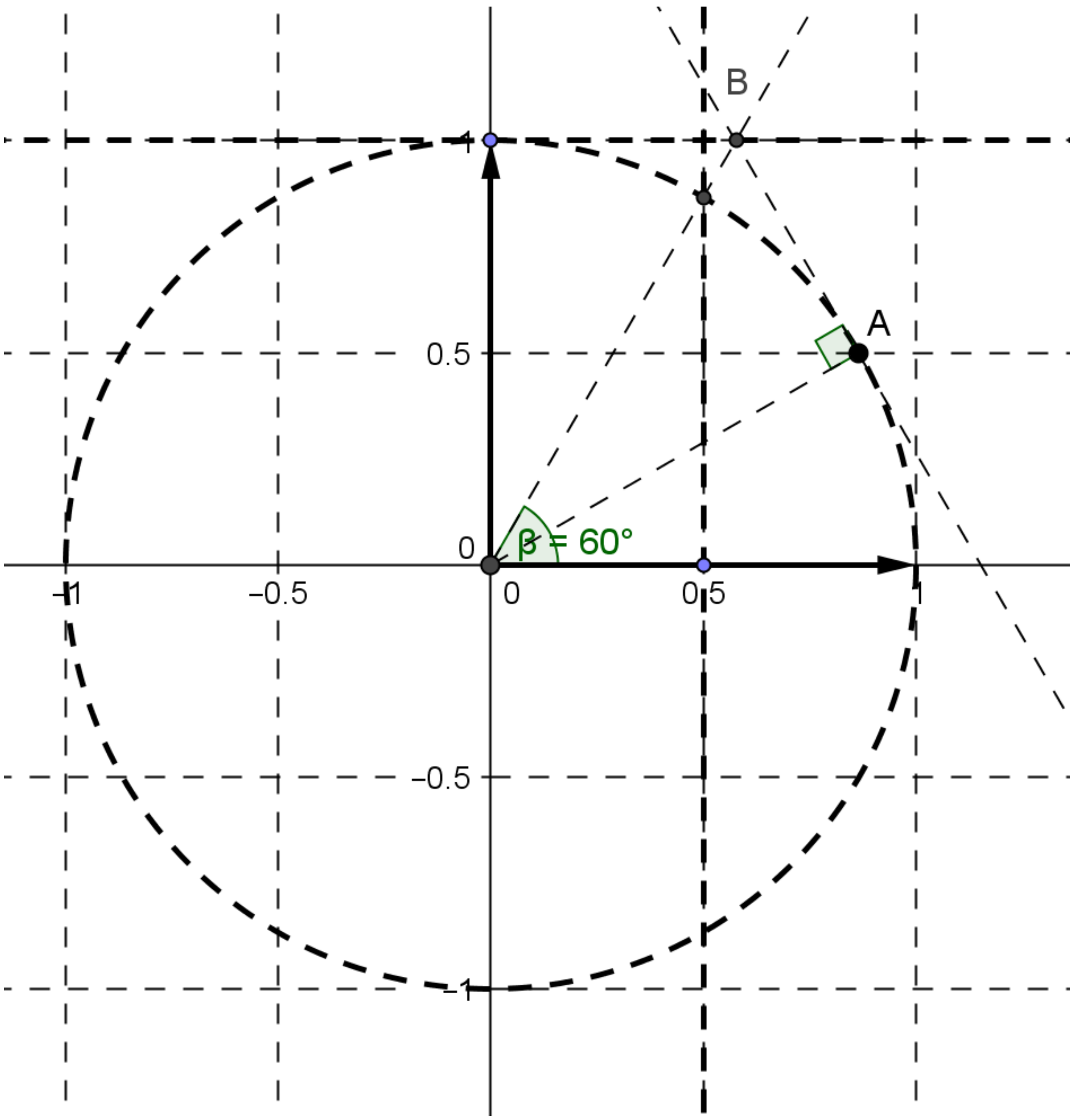
- Calcul de l'affixe de B

$$b = ca = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$$

Ainsi on a :

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{\sqrt{3}}{3} : \text{Difficile à exploiter} \\ \\ y_B = 1 : \text{Facile à exploiter} \end{cases}$$

$\boxed{\text{On obtient que le point } B \text{ appartient aussi à la droite parallèle à l'axe des abscisses et coupant l'axe des ordonnées en 1}}$


B
1
A
0.5
0
β = 60°
-1
-0.5
0
0.5
1
-0.5
-1

EXERCICE 4 (3 points)

On a :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a \times 0 + b)e^0 = 2 \\ (a \times 2 + b)e^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ (2a + 2)e^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 2a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

On a donc :

$$f(x) = (-x + 2)e^x$$

Pour cadrer au mieux le logo, on va chercher le maximum de la fonction f sur $[-1; 2]$

$$f'(x) = -e^x + (-x + 2)e^x = (-x + 1)e^x$$

Or $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $-x + 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

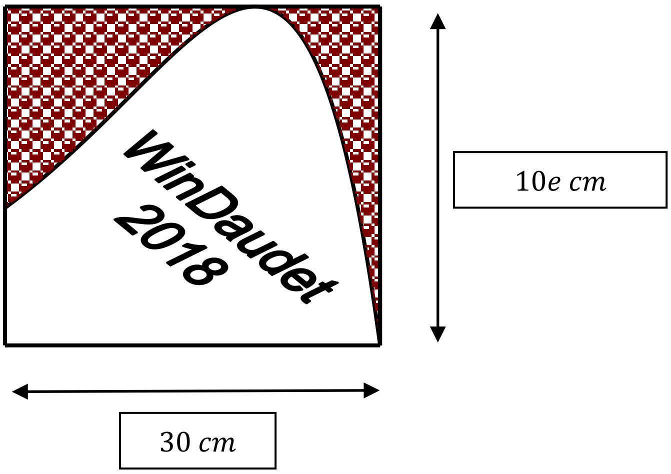
La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1; 2]$

La fonction f atteint donc son maximum sur $[-1; 2]$ en $x = 1$

Et ce maximum est :

$$f(1) = (-1 + 2)e^1 = e$$

Le logo doit donc être imprimé dans un cadre de dimension rectangulaire de 30 cm par $10e$ cm



L'imprimeur imprime ces autocollants sur des planches de largeur 35 cm et de longueur 260 cm.

Or on a $10e \approx 27{,}18$

Ainsi, on a $30 < 35$ et $10e < 35$

On peut donc imprimer ces logos horizontalement ou verticalement

- Si on les imprime horizontalement :

$$\frac{260}{30} \approx 8{,}67$$

On peut en imprimer au maximum 8

- Si on les imprime verticalement :

$$\frac{260}{10e} = \frac{26}{e} \approx 9{,}56$$

On peut en imprimer au maximum 9

On pourra donc en imprimer au maximum 9 sur la planche de largeur 35 cm et de longueur 260 cm.