**BACCALAURÉAT BLANC**

# LYCEE DAUDET

## SESSION 2018

---

**MATHÉMATIQUES**

SÉRIE : **S**

SPECIALITE

---

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 9

---

Ce sujet comporte **6** pages numérotées de 1 à 6.

Il y a une annexe qui est à rendre avec votre copie.

Avant de démarrer, vérifiez que vous avez bien les six pages du sujet.

Les **seules** calculatrices autorisées sont :

Les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique

Les calculatrices programmables avec mémoire alphanumérique et disposant de la fonctionnalité « Mode Examen »

**Toute autre calculatrice est formellement interdite**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Toute trace de recherche ou de prise d'initiative, même non aboutie, pourra être prise en compte dans l'évaluation de votre copie
On rappelle aussi que dans un exercice, on peut admettre un résultat et s'en servir par la suite.

## EXERCICE 1 ( 6 points )

**A chaque exercice prendre une nouvelle copie en mentionnant nom et classe**

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2 ;

S'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est de 0,75 et s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est de 0,45 . On note pour tout entier naturel $n$ non nul :

- L'événement $G_n$ : « Le joueur gagne la $n$-ième partie »
- $p_n = p(G_n)$

Ainsi on a : $p_1 = p(G_1) = 0{,}2$

*Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre.*

### Partie A

Dans cette Partie, on s'intéresse aux deux premières parties de ce joueur.

*On donnera les valeurs exactes des probabilités soit sous forme décimale soit sous forme de fraction.*

**1 )** Calculer la probabilité qu'un joueur gagne les deux premières parties.

**2 )** Montrer que $p_2 = 0{,}51$

**3 )** Un joueur a parié avec un de ses amis qu'il gagnerait au moins l'une des deux premières parties.

S'il gagne son ami lui donnera 10 €, s'il perd le joueur donnera à son ami 5 €

On note $X$ le gain du joueur ( positif s'il gagne et négatif s'il perd )

**a)** Calculer la probabilité que le joueur remporte son pari.

**b)** Calculer et interpréter $E(X)$

**4 )** Le joueur a gagné la deuxième partie, calculer la probabilité qu'il ait gagné la première partie

### Partie B

Dans cette Partie, on s'intéresse à toutes les parties de ce joueur.

**1 )** Montrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$p_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{9}{20}$$

**2 )** Calculer la probabilité que le joueur gagne la troisième partie.

**3 )** On propose la feuille de calcul suivante :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Numéro de partie | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | Probabilité de gagner | 0,2 | 0,51 | 0,603 | 0,6309 | 0,63927 | 0,641781 | 0,6425343 | 0,64276029 | 0,64282809 | 0,64284843 |
| 3 | Probabilité de perdre | 0,8 | 0,49 | 0,397 | 0,3691 | 0,36073 | 0,358219 | 0,3574657 | 0,35723971 | 0,35717191 | 0,35715157 |
| 4 | | | | | | | | | | | |

**a)** Quelle formule à copier glisser vers la droite a-t-on pu entrer en C2 ?

**b)** Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la suite $(p_n)$ ?

**4 )** Montrer par récurrence que :

$$p_n = \frac{9}{14} - \frac{31}{21} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

**5 )**

**a)** Prouvez ou infirmez votre conjecture concernant la limite de la suite $(p_n)$

**b)** On note $L$ la limite de la suite $(p_n)$

Déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que $0 < L - p_n < 10^{-6}$ pour tout entier naturel $n \geq n_0$

Justifier votre réponse.

## EXERCICE 2 ( 6 points )

**A chaque exercice prendre une nouvelle copie en mentionnant nom et classe**

On rappelle les formules :

| | |
|---|---|
| $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$ | $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$ |
| $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$ | $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$ |

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\left(cos(x) + sin(x)\right) - \frac{1}{2}$$

**1 )**

**a)** Justifier que pour tout réel $x$ on peut écrire :

$e^{-x}\left(cos(x) + sin(x)\right) = k\ e^{-x} sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ où $k$ est une constante réelle strictement positive à préciser

**b)** En déduire les solutions de l'équation :

$$f(x) = -\frac{1}{2}$$

**2 )** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$

**3 )** Montrer que $f^{'}(x) = -2sin(x)e^{-x}$ puis en déduire le tableau de variation de $f$ sur $[0;\pi]$

**4 )** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0$ sur $[0;\pi]$

**5 )** On propose l'algorithme suivant :

$\boldsymbol{A} \leftarrow \mathbf{0}$

$\boldsymbol{B} \leftarrow \boldsymbol{\pi}$

**Tant que** $|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}| > 0{,}01$

$\boldsymbol{C} \leftarrow \dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}}$

**Si** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C}) < 0$

**Alors** $\boldsymbol{B} \leftarrow \boldsymbol{C}$

**Sinon** $\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{C}$

**Fin Si**

**Fin Tant que**

**a)** On donne en **Annexe**, un tableau incomplet correspondant à cet algorithme.

Les valeurs ont été arrondies à $10^{-4}$ près

Compléter ce tableau en arrondissant à $10^{-4}$ près

**b)** Quelles valeurs contiendront les variables $A$ et $B$ après l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter le résultat ainsi obtenu.

**<u>Pensez à joindre l'annexe à l'exercice 2 même si vous ne l'avez pas complétée</u>**

## EXERCICE 3 ( 5 points )

**A chaque exercice prendre une nouvelle copie en mentionnant nom et classe**

**1 )** On considère l'équation (E) : $7u - 13v = 2$

**a)** Déterminer deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $7u - 13v = 2$

**b)** Déterminer tous les couples $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que : $7u - 13v = 2$.

**2 )** On considère deux entiers naturels $a$ et $b$.

Pour tout entier $n$, on note $\phi(n)$ le reste de la division euclidienne de $a \times n + b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit :

- A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau suivant :

| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- Pour chaque lettre du message, on détermine l'entier $n$ associé puis on calcule $\phi(n)$.
- La lettre est alors codée par la lettre associée à $\phi(n)$.

On ne connaît pas les entiers $a$ et $b$, mais on sait que :

- La lettre F est codée par la lettre K ;
- La lettre T est codée par la lettre O.

**a)** Montrer que les entiers $a$ et $b$ sont tels que :

$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \quad [26] \\ 19a + b \equiv 14 \quad [26] \end{cases}$$

**b)** En déduire qu'il existe un entier $q$ tel que $14a - 26q = 4$

**c)** Déterminer tous les couples d'entiers $(a; b)$, avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que :

$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10 \quad [26] \\ 19a + b \equiv 14 \quad [26] \end{cases}$$

**3 )** On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

**a)** Coder la lettre « G ».

**b)** Soit $n$ un entier naturel, montrer que $23\,\phi(n) + 9 - n$ est divisible par 26.

**c)** En déduire un procédé de décodage.

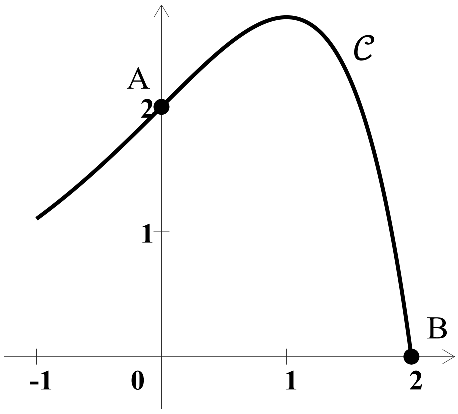
**d)** Décoder la lettre « Z ».

## EXERCICE 4 ( 3 points )

**A chaque exercice prendre une nouvelle copie en mentionnant nom et classe**

Un imprimeur doit fabriquer des autocollants rectangulaires pour une marque qui fabrique des planches à voile.


Ces autocollants sont obtenus à partir de la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction $f$ représentée ci-dessous.




On sait que :

- $f$ est la fonction définie sur $[-1;2]$ par $f(x) = (ax + b)e^x$ où $a$ et $b$ sont deux réels fixés ;
- Le repère est orthonormé d'unité 10 cm ( *unité non respectée sur la représentation fournie*) ;
- $A(0,2)$ et $B(2;0)$ sont deux points de la courbe $\mathcal{C}$.

L'imprimeur imprime ces autocollants sur des planches de largeur 35 cm et de longueur 260 cm.

Combien d'autocollants peut-on imprimer au maximum sur une planche ?

**Nom :** **Prénom :** **Classe :TS…**

# Annexe

# A rendre avec l'exercice 2

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | | | 0,5890 | 0,6872 | 0,7363 | 0,7609 | 0,7731 | 0,7793 | 0,7823 |
| $B$ | 3,1416 | 1,5708 | | | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 |
| $\|B-A\|$ | 3,1416 | 1,5708 | | | 0,1963 | 0,0982 | 0,0491 | 0,0245 | 0,0123 | 0,0061 | 0,0031 |
| $C$ | 1,5708 | 0,7854 | | | 0,6872 | 0,7363 | 0,7609 | 0,7731 | 0,7793 | 0,7823 | 0,7839 |
| $f(A)$ | 0,5 | 0,5 | | | 0,2696 | 0,2079 | 0,1764 | 0,1606 | 0,1527 | 0,1488 | 0,1468 |
| $f(C)$ | $-$ 0,5432 | $-$ 0,2921 | | | 0,1448 | 0,1448 | 0,1448 | 0,1448 | 0,1448 | 0,1448 | 0,1448 |

# Merci de ne pas rendre cette annexe avec les exercices 1, 3 ou 4